Решение неравенств методом интервалов

Устная работа

1. Разложение на множители квадратного трехчлена x^2+6x+9 имеет вид:

А) $(x+2)(x-3)$;

Б) $\left(x+3\right)^2$;

В) $\left(x-3\right)^2$.

2. Корнями уравнения $(x-2)(x+10)=0$ являются:

А) 2 и 10;

Б) 2 и -10;

В)-2 и 10;

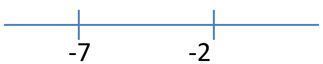
Г) -2 и -10.

Устная работа

3. Изображение на координатной прямой корней уравнения $(x+2)(x-7)=0$

А) 

Б) 

В) 

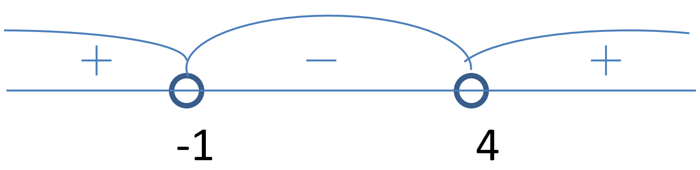
4. Решением неравенства $(x-4)(x+1)>0$ будет:

А) $(-1;4)$;

Б) $(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$;

В) $(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$;

Г) $(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$.



Устная работа

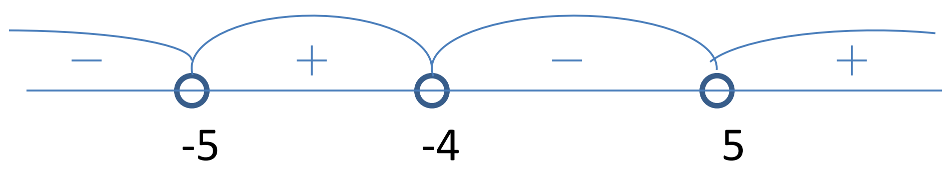
5. Решением неравенства $(x+5)(x+4)(x-5)<0$ будет:

А) $(-\infty;-5)\cup(-4;5)$;

Б) $(-5;-4)\cup(5;+\infty)$;

В) $(-5;-4)\cup(-4;5)$;

Г) $(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$.



Алгоритм решения неравенств методом интервалов

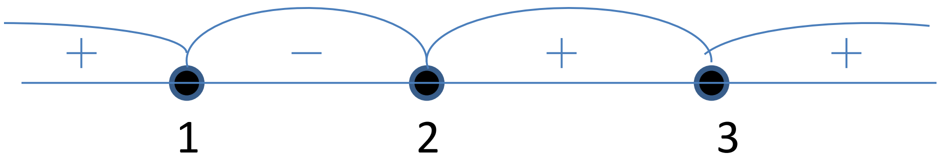
1. Найти нули числителя и знаменателя.
2. Отметить полученные значения на числовой прямой:

- если неравенство строгое, то все точки выколотые;
- если нер-во нестрогое, то нули числителя - закрашенные, а нули знаменателя – выколотые.

3. Определить знак выражения внутри каждого получившегося интервала.
4. Выбрать подходящие для данного неравенства интервалы:

- если знак неравенства $<$ *или* $\leq$, то выбирает интервалы с «-».
- если знак неравенства $>$ *или* $\geq$, то выбирает интервалы с «+».

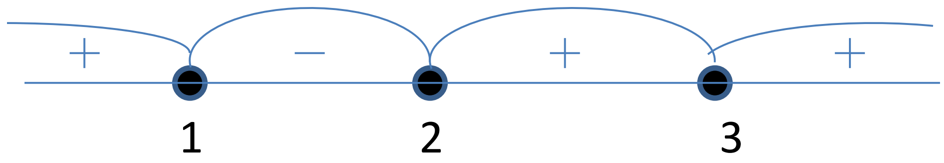
№1. Решить неравенство $(x-1)(3-x)^4(x-2) \leq 0$



Ответ: $[1;\ 2] \cup \{3\}$.

№2. Решить неравенство: $\dfrac{x^2-5}{x-7} \geq 0.$

№1. Решить неравенство $(x-1)(3-x)^4(x-2)\le 0$

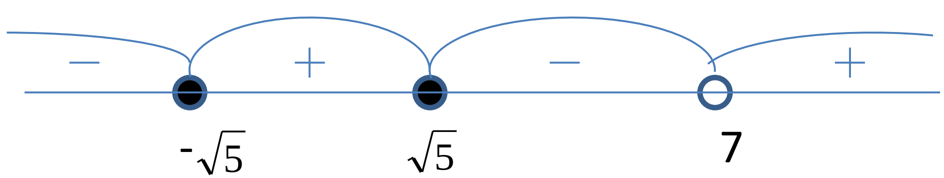


Ответ: $[1;\,2]\cup\{3\}.$

№2. Решить неравенство: $\dfrac{x^2-5}{x-7}\ge 0.$

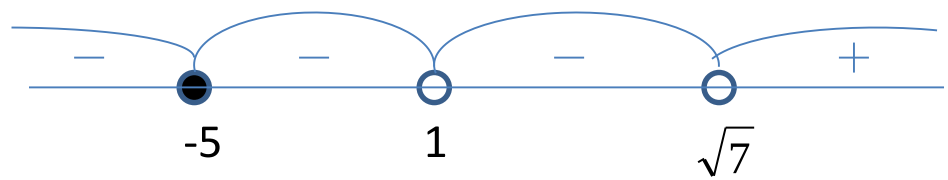
Это неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}{x-7}\ge 0.$$



Ответ: $[-\sqrt{5};\sqrt{5}]\cup(7;+\infty).$

№3. Решить неравенство: $\dfrac{(x-1)(x+5)^2}{(x-\sqrt{7})(x-1)^3} \le 0.$

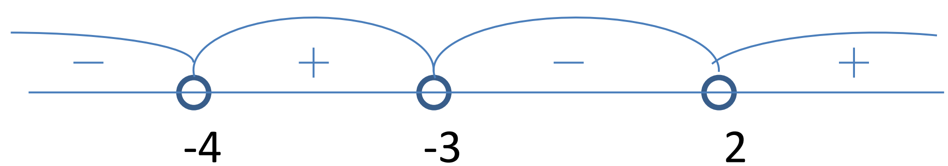


Ответ: $(-\infty;1) \cup (1;\sqrt{7}).$

№4. Решить неравенство: $\dfrac{(x^2+3x+3)(x+3)}{x^2+2x-8} > 0.$

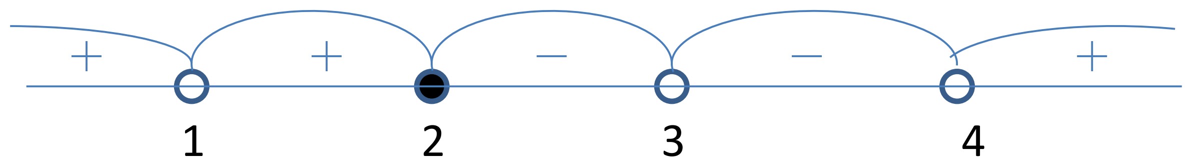
Это неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{(x^2+3x+3)(x+3)}{(x+4)(x-2)} > 0.$$



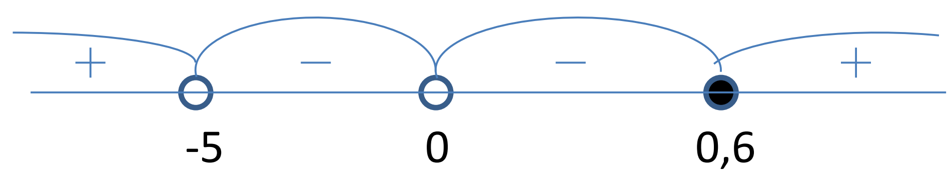
Ответ: $(-4;-3) \cup \left(2;+\infty\right).$

№5. Решить неравенство: $\dfrac{(x-2)(x-3)^3(x-4)^2}{(x-1)^4(x-3)^5(x-4)} \geq 0.$



Ответ: $(-\infty;1)\cup(1;2]\cup(4;+\infty).$

№6. Решить неравенство: $\dfrac{x(x-0{,}6)}{x^7(x^2+2x+7)^2(x+5)^3} \leq 0.$



Ответ: $(-5;0)\cup(0;0{,}6].$

№7. Найти все значения параметра а, при которых решением неравенства $\frac{x^2+x-12}{x^2-(a-4)x-4a}<0$

будет объединение двух непересекающихся интервалов.

1. Разложим на множители числитель и знаменатель:

$$x^2+x-12=(x-3)(x+4)$$

$$x^2-(a-4)x-4a$$

$$D=(a-4)^2+16a=a^2+8a+16=(a+4)^2$$

$$x_1=a,\ x_2=-4.$$

$$x^2-(a-4)x-4a=(x+4)(x-a).$$

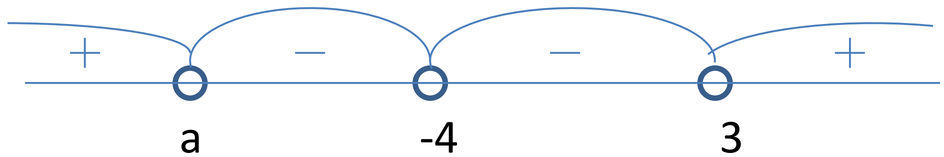
Тогда наше неравенство принимает вид: $\frac{(x-3)(x+4)}{(x+4)(x-a)}<0.$

№7 (Продолжение).

Решим полученное неравенство $\dfrac{(x-3)(x+4)}{(x+4)(x-a)}<0.$

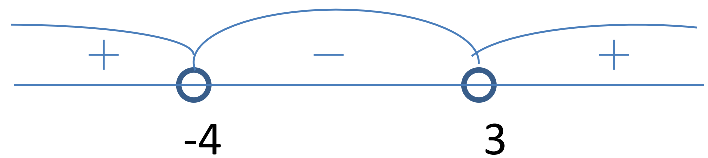
при различных значениях параметра а.

1. Если a<-4:



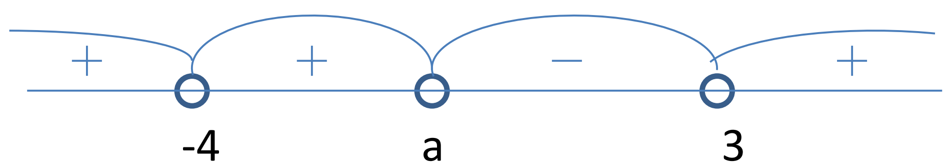
То решением нер-ва будет: $(a;-4)\cup(-4;3).$

2. Если a=-4:



То решением неравенства будет: $(-4;3).$

3. Если -4<a<3:



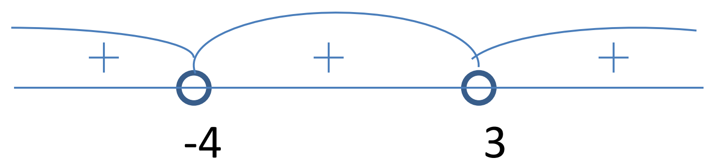
То решением неравенства будет: $(a;3).$

№7 (Продолжение).

Решим полученное неравенство $\dfrac{(x-3)(x+4)}{(x+4)(x-a)} < 0.$

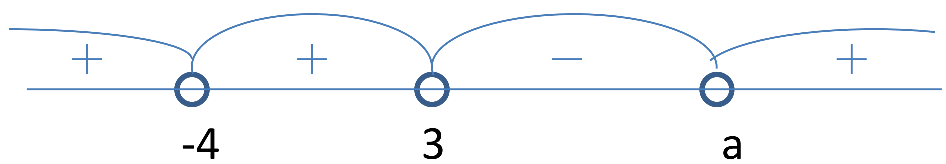
при различных значениях параметра а.

4. Если а=3:



То решением нер-ва будет: пустое множество.

5. Если а>3:



То решением неравенства будет: $(3; a).$

Объединение двух интервалов получилось только при а<-4.

Ответ: а<-4.

Обобщенный метод интервалов

Применяется для решения неравенств вида $f(x) < 0\ (\leq, \geq, >)$,

где f(x) – произвольное выражение с одной переменной.

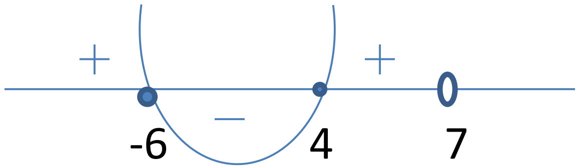
Алгоритм:

1. Находим область определения функции f(x) и нули этой функции.
2. Отмечаем на координатной оси граничные точки области определения и нули функции.
3. Определяем знаки на промежутках.
4. Наносим штриховку и записываем ответ.

№8. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2+2x-24}-\frac{3}{4}x-3}{x-7}<0.$

1. Вводим функцию $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2x-24}-\frac{3}{4}x-3}{x-7}$ и находим область определения:

$$\begin{cases} x^2+2x-24\geq 0, \\ x\neq 7. \end{cases}$$



$$D(y):(-\infty;-6]\cup[4;7)\cup(7;+\infty)$$

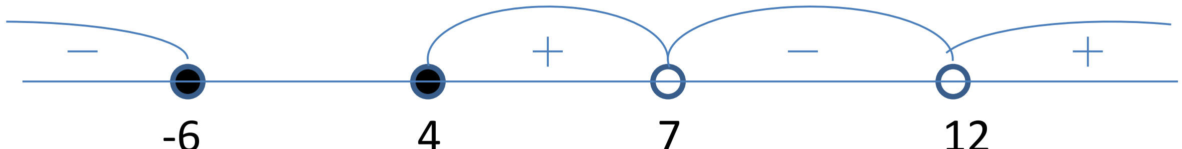
2. Найдем нули функции

$$\sqrt{x^2+2x-24}-\frac{3}{4}x-3=0$$

$$\sqrt{x^2+2x-24}=\frac{3}{4}x+3$$

$$\begin{cases} 7x^2-40x-528=0, \\ \frac{3}{4}x+3\geq 0. \end{cases} \Rightarrow x=12$$

3. Определяем знаки на каждом промежутке



Ответ: $(-\infty;-6]\cup(7;12).$

Домашнее задание

№1**. Решить неравенства:**

А) $\frac{(x-3)^2(25-x^2)}{x-3} \geq 0;$

Б) $\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{x} < 2 \quad (\text{или } \frac{1-\sqrt{1-8x^2}-2x}{x} < 0).$

№2. Найти все значения параметра а, при которых решением неравенства будет объединение двух непересекающихся интервалов

$$\frac{x^2-(a+6)x+6a}{x^2-(a-3)x-3a} < 0$$

№2. Найти все значения параметра а, при которых решением неравенства будет объединение двух непересекающихся интервалов

$$\frac{x^2-(a+6)x+6a}{x^2-(a-3)x-3a}<0$$

1. Разложим на множители числитель и знаменатель:

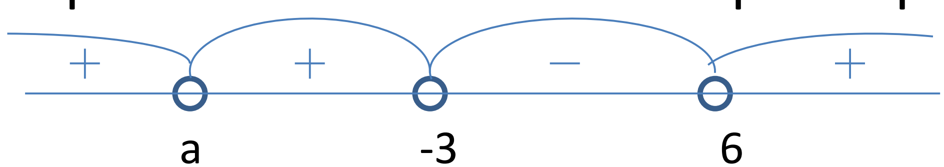
$$x^2-(a+6)x+6a=(x-6)(x-a)$$

$$x^2-(a-3)x-3a=(x+3)(x-a)$$

Тогда наше неравенство принимает вид: $\dfrac{(x-6)(x-a)}{(x+3)(x-a)}<0.$

Решим его при различных значениях параметра а.

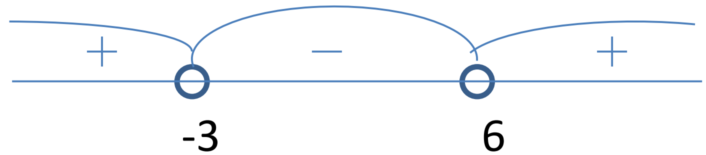
1.Если а<-3:



То решением неравенства будет: $(-3;6).$

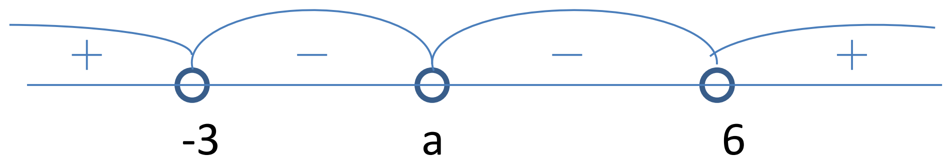
№2 (Продолжение). $\dfrac{(x-6)(x-a)}{(x+3)(x-a)} < 0.$

2. Если a=-3:



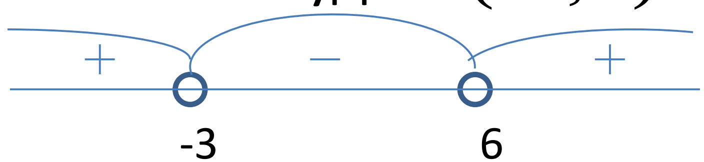
То решением неравенства будет: $(-3;6).$

3. Если -3<a<6:



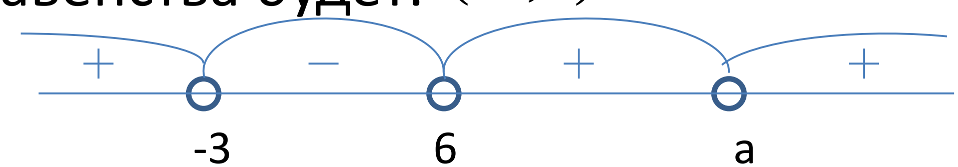
То решением неравенства будет: $(-3;a)\cup(a;6).$

4. Если a=6:



То решением неравенства будет: $(-3;6).$

5. Если a>6:



То решением неравенства будет: $(-3;6).$

Ответ: -3<a<6.