Исследование квадратного трехчлена.
Задачи с параметрами.

Определение квадратного трехчлена и его корней

Квадратным трехчленом называется многочлен вида

$$ax^2 + bx + c,$$

где x – переменная, a,b,c – некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Корнем квадратного трехчлена называется значение переменной, при котором значение этого трехчлена равно нулю.

Чтобы найти корни квадратного трехчлена, необходимо решить квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$

Формулы корней квадратного трехчлена

Для квадратного трехчлена вида $ax^2 + bx + c$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac$$

Квадратный трехчлен имеет 2 различных корня тогда и только тогда, когда D>0.

Квадратный трехчлен имеет 1 корень (кратности 2) тогда и только тогда, когда D=0.

Квадратный трехчлен не имеет действительных корней тогда и только тогда, когда D<0.

Для квадратного трехчлена вида $ax^2 + 2nx + c$

$$x_{1,2} = \frac{-n \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ где } D_1 = n^2 - ac.$$

Пример 1

Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $(a+1)x^2+2ax+2=0$ имеет два различных корня.

Пример 1

Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $(a+1)x^2+2ax+2=0$ имеет два различных корня.

1) Если $a+1=0.$

2) Если $a+1\neq 0.$

Пример 1

Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $(a+1)x^2+2ax+2=0$ имеет два различных корня.

1) Если $a+1=0.$ То $a=-1 \quad u \quad -2x+2=0 \Rightarrow x=1.$

2) Если $a+1\neq 0.$

Пример 1

Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $(a+1)x^2+2ax+2=0$ имеет два различных корня.

1) Если $a+1=0.$ То $a=-1 \quad и \quad -2x+2=0 \Rightarrow x=1.$

2) Если $a+1\neq 0.$ То имеем квадратное уравнение, которое имеет 2 различных корня т. и т.т., когда $D_1>0.$

Пример 1

Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $(a+1)x^2+2ax+2=0$ имеет два различных корня.

1) Если $a+1=0.$ То $a=-1 \quad и \quad -2x+2=0 \Rightarrow x=1.$

2) Если $a+1\neq 0.$ То имеем квадратное уравнение, которое имеет 2 различных корня т. и т.т., когда $D_1>0.$

$D_1=a^2-2(a+1).$ $\quad a^2-2a-2>0$

Пример 1

Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $(a+1)x^2+2ax+2=0$ имеет два различных корня.

1) Если $a+1=0.$ То $a=-1 \quad и \quad -2x+2=0 \Rightarrow x=1.$

2) Если $a+1 \neq 0.$ То имеем квадратное уравнение, которое имеет 2 различных корня т. и т.т., когда $D_1>0.$

$D_1=a^2-2(a+1).\ \ a^2-2a-2>0 \Rightarrow a \in (-\infty;1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3};+\infty)$

Т.к. $a \neq -1,\ то\ a \in (-\infty;-1) \cup (-1;1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3};+\infty).$

Пример 2

Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $(a-2)x^2+2(a-2)x+2=0$ не имеет действительных корней.

Пример 2

Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $(a-2)x^2+2(a-2)x+2=0$ не имеет действительных корней.

1) Если $a=2,$

2) Если $a\neq 2,$

Пример 2

Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $(a-2)x^2+2(a-2)x+2=0$ не имеет действительных корней.

1) Если $a=2,$ то уравнение не имеет корней.

2) Если $a \neq 2,$

Пример 2

Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $(a-2)x^2+2(a-2)x+2=0$ не имеет действительных корней.

1) Если $a=2,$ то уравнение не имеет корней.

2) Если $a\neq 2,$ то имеем кв. уравнение, которое не имеет действительных корней т. и т.т., когда дискриминант этого уравнения отрицательный.

Пример 2

Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $(a-2)x^2+2(a-2)x+2=0$ не имеет действительных корней.

1) Если $a=2,$ то уравнение не имеет корней.

2) Если $a \neq 2,$ то имеем кв. уравнение, которое не имеет действительных корней т. и т.т., когда дискриминант этого уравнения отрицательный.

$D_1=(a-2)^2-2(a-2).$

Пример 2

Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $(a-2)x^2+2(a-2)x+2=0$ не имеет действительных корней.

1) Если $a=2,$ то уравнение не имеет корней.

2) Если $a\neq 2,$ то имеем кв. уравнение, которое не имеет действительных корней т. и т.т., когда дискриминант этого уравнения отрицательный.

$$D_1=(a-2)^2-2(a-2)=(a-2)(a-4).$$

$$(a-2)(a-4)<0$$

Пример 2

Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $(a-2)x^2+2(a-2)x+2=0$ не имеет действительных корней.

1) Если $a=2,$ то уравнение не имеет корней.

2) Если $a\neq 2,$ то имеем кв. уравнение, которое не имеет действительных корней т. и т.т., когда дискриминант этого уравнения отрицательный.

$$D_1=(a-2)^2-2(a-2)=(a-2)(a-4).$$

$$(a-2)(a-4)<0\Rightarrow a\in(2;4).$$

Тогда, уравнение не имеет действ. корней при

$a\in[2;\,4)$.

Пример 3

Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $(2a-5)x^2-2(a-1)x+3=0$ имеет единственный корень.

1) Если $a=\dfrac{5}{2}, \text{то} \ -2\left(\dfrac{5}{2}-1\right)x+3=0 \Rightarrow x=1 - \text{единств. корень}$

2) Если $a \neq \dfrac{5}{2}$, то имеем кв. уравнение, которое имеет единственный корень т. и т.т., когда дискриминант этого уравнения равен нулю.

$$D_1=(a-1)^2-3(2a-5)=a^2-8a+16=(a-4)^2.$$

$$(a-4)^2=0 \Rightarrow a=4.$$

Тогда уравнение имеет единственный корень при $a \in \left\{\dfrac{5}{2}; 4\right\}$.

Теорема Виета

- **Теорема.** Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0,$ то справедливы формулы (формулы Виета):

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

- **Теорема.** Если числа α и β таковы, что $\alpha+\beta=-p$ и $\alpha\cdot\beta=q,$ то эти числа являются корнями уравнения $x^2+px+q=0.$

Решить устно уравнения:

а) $x^2-6x+8=0;$ г) $x^2+9x+14=0;$

б) $x^2-5x-6=0;$ д) $3x^2-8x+5=0;$

в) $x^2+2x-24=0;$ е) $2x^2+7x+5=0.$

Пример 4

Найти все значения параметра *p*, при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 + px + 1 = 0$ равна 1.

Пример 4

Найти все значения параметра *p*, при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 + px + 1 = 0$ равна 1.

Пусть x_1 и x_2 - корни исходного уравнения. Тогда необходимо найти такое *p*, при котором $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 1$.

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$$

Пример 4

Найти все значения параметра *p*, при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 + px + 1 = 0$ равна 1.

Пусть x_1 и x_2 - корни исходного уравнения. Тогда необходимо найти такое *p,* при котором $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 1$.

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$$

Тогда по теореме Виета

$$x_1^2 + x_2^2 = (-p)^2 - 2 \cdot 1 = p^2 - 2.$$

Пример 4

Найти все значения параметра *p*, при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 + px + 1 = 0$ равна 1.

Пусть x_1 и x_2 - корни исходного уравнения. Тогда необходимо найти такое *p*, при котором $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 1.$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$$

Тогда по теореме Виета

$$x_1^2 + x_2^2 = (-p)^2 - 2 \cdot 1 = p^2 - 2.$$

Тогда $p^2 - 2 = 1 \Rightarrow p = \pm\sqrt{3}.$

Пример 4

Найти все значения параметра *p*, при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 + px + 1 = 0$ равна 1.

Пусть x_1 и x_2 - корни исходного уравнения. Тогда необходимо найти такое *p*, при котором $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 1.$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$$

Тогда по теореме Виета

$$x_1^2 + x_2^2 = (-p)^2 - 2 \cdot 1 = p^2 - 2.$$

Тогда $p^2 - 2 = 1 \Rightarrow p = \pm\sqrt{3}.$

Проверка: при найденных значениях *p*, уравнение будет иметь вид $x^2 \pm \sqrt{3}x + 1 = 0$.

Тогда $D = 3 - 4 < 0 \Rightarrow$ полученное уравнение не имеет корней. Поэтому таких значений *p* не сущ.

Расположение корней квадратного трехчлена относительно нуля

Предложение: для того чтобы корни квадратного трехчлена

$$ax^2 + bx + c$$

существовали и были положительными, необходимо и достаточно выполнение следующей системы условий:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{a} > 0, \\ \dfrac{c}{a} > 0. \end{cases}$$

Расположение корней квадратного трехчлена относительно нуля

Предложение: для того чтобы корни квадратного трехчлена

$$ax^2 + bx + c$$

существовали и были отрицательными, необходимо и достаточно выполнение следующей системы условий:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{a} < 0, \\ \dfrac{c}{a} > 0. \end{cases}$$

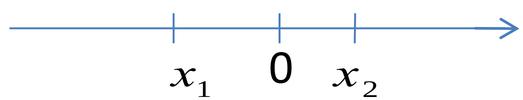
Расположение корней квадратного трехчлена относительно нуля

Предложение: для того чтобы корни квадратного трехчлена

$$ax^2 + bx + c$$

существовали и были разных знаков, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\frac{c}{a} < 0.$$



Пример 5

При каких значениях параметра *a* корни уравнения

$(a+1)x^2 - 4ax + a - 5 = 0$ положительны?

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{a} > 0, \\ \dfrac{c}{a} > 0. \end{cases}$$

$$D =$$

$$-\frac{b}{a} =$$

$$\frac{c}{a} =$$

Пример 5

При каких значениях параметра *a* корни уравнения

$(a+1)x^2-4ax+a-5=0$ положительны?

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{a} > 0, \\ \dfrac{c}{a} > 0. \end{cases}$$

$D = 12a^2 + 16a + 20.\quad 3a^2 + 4a + 5 \geq 0$

$-\dfrac{b}{a} =$

$\dfrac{c}{a} =$

Пример 5

При каких значениях параметра *a* корни уравнения

$(a+1)x^2 - 4ax + a - 5 = 0$ положительны?

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ -\dfrac{b}{a} > 0, \\ \dfrac{c}{a} > 0. \end{cases} \quad \begin{aligned} & D = 12a^2 + 16a + 20. \quad 3a^2 + 4a + 5 \ge 0 \Rightarrow x \in R. \\ & -\frac{b}{a} = \frac{4a}{a+1} \\ & \frac{c}{a} = \frac{a-5}{a+1} \end{aligned}$$

Тогда остается решить следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{4a}{a+1} > 0, \\ \dfrac{a-5}{a+1} > 0. \end{cases}$$

Пример 5

При каких значениях параметра *a* корни уравнения $(a+1)x^2 - 4ax + a - 5 = 0$ положительны?

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{a} > 0, \\ \dfrac{c}{a} > 0. \end{cases} \qquad \begin{aligned} & D = 12a^2 + 16a + 20. \quad 3a^2 + 4a + 5 \geq 0 \Rightarrow a \in R. \\ & -\frac{b}{a} = \frac{4a}{a+1} \\ & \frac{c}{a} = \frac{a-5}{a+1} \end{aligned}$$

Тогда остается решить следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{4a}{a+1} > 0, \\ \dfrac{a-5}{a+1} > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty), \\ a \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty). \end{cases}$$

Если a=-1, то имеем уравнение $4x - 6 = 0$. x=3/2 – положит.

Ответ: $a \in (-\infty; -1] \cup (5; +\infty)$.

Расположение корней квадратного трехчлена относительно заданных чисел

Найти все значения *b*, при которых только один корень квадратного уравнения $x^2 - 2(b+1)x + 6b - 3 = 0$ больше 2.

$$D_1 =$$

Расположение корней квадратного трехчлена относительно заданных чисел

Найти все значения *b*, при которых только один корень квадратного уравнения $x^2 - 2(b+1)x + 6b - 3 = 0$ больше 2.

$$D_1 = (b+1)^2 - 6b + 3 = b^2 - 4b + 4 = (b-2)^2$$

Если $b = 2,$

Если $b \neq 2,$

Расположение корней квадратного трехчлена относительно заданных чисел

Найти все значения *b*, при которых только один корень квадратного уравнения $x^2 - 2(b+1)x + 6b - 3 = 0$ больше 2.

$$D_1 = (b+1)^2 - 6b + 3 = b^2 - 4b + 4 = (b-2)^2$$

Если $b = 2, \text{то} \quad x = b + 1 = 3.$

Если $b \neq 2,$ дискриминант больше нуля, т.е. уравнение будет иметь 2 корня

Расположение корней квадратного трехчлена относительно заданных чисел

Найти все значения *b*, при которых только один корень квадратного уравнения $x^2 - 2(b+1)x + 6b - 3 = 0$ больше 2.

$$D_1 = (b+1)^2 - 6b + 3 = b^2 - 4b + 4 = (b-2)^2$$

Если $b = 2,\ то \quad x = b + 1 = 3.$

Если $b \neq 2,$ дискриминант больше нуля, т.е. уравнение будет иметь 2 корня

$$\left.\begin{aligned} x &= 2b-1; \\ x &= 3. \end{aligned}\right| \Rightarrow 2b - 1 \leq 2 \Rightarrow b \leq \frac{3}{2}$$

Ответ: $b \leq \frac{3}{2}$ $, b = 2.$

Расположение корней квадратного трехчлена относительно заданных чисел

Расположение нулей квадратичной функции на числовой прямой	Необходимые и достаточные условия
x_1, x_2, α, x	$\begin{cases} D \geq 0, \\ a \cdot f(\alpha) > 0, \\ x_0 < \alpha. \end{cases}$
α, x_1, x_2, x	$\begin{cases} D \geq 0, \\ a \cdot f(\alpha) > 0, \\ x_0 > \alpha. \end{cases}$
x_1, α, x_2, x	$a \cdot f(\alpha) < 0$
α, x_1, x_2, β, x	$\begin{cases} D \geq 0, \\ a \cdot f(\alpha) > 0, \\ a \cdot f(\beta) > 0, \\ \alpha < x_0 < \beta. \end{cases}$
α, x_1, β, x_2, x	$\begin{cases} a \cdot f(\alpha) > 0, \\ a \cdot f(\beta) < 0. \end{cases}$
x_1, α, x_2, β, x	$\begin{cases} a \cdot f(\alpha) < 0, \\ a \cdot f(\beta) > 0. \end{cases}$
x_1, α, β, x_2, x	$\begin{cases} a \cdot f(\alpha) < 0, \\ a \cdot f(\beta) < 0. \end{cases}$

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

$$D = b^2 - 4ac - \textit{дискриминант}$$

$$x_1,\ x_2 - \textit{корни}\ f(x)$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Пример 6

Найти все значения *b*, при которых корни уравнения $x^2 + x + b = 0$ больше *b*.

$$\alpha < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D \geq 0, \\ a \cdot f(\alpha) > 0, \\ x_0 > \alpha. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 4b \geq 0, \\ b^2 + 2b > 0, \\ -\dfrac{1}{2} > b. \end{cases}$$

Пример 6

Найти все значения *b*, при которых корни уравнения $x^2 + x + b = 0$ больше *b*.

$$\alpha < x_1 \le x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D \ge 0, \\ a \cdot f(\alpha) > 0, \\ x_0 > \alpha. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 4b \ge 0, \\ b^2 + 2b > 0, \\ -\dfrac{1}{2} > b. \end{cases} \Rightarrow b \in (-\infty; -2).$$

Пример 7

Пусть квадратное уравнение $(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0$ имеет корни x_1 и x_2. Найти все такие значения параметра *a*, что x_1 и x_2 удовлетворяют условию $x_1<2<3<x_2$.

$$x_1<\alpha<\beta<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a\cdot f(\alpha)<0, \\ a\cdot f(\beta)<0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-2)(4a-20)<0, \\ (a-2)(7a-36)<0. \end{cases}$$

Пример 7

Пусть квадратное уравнение $(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0$ имеет корни x_1 и x_2. Найти все такие значения параметра *a*, что x_1 и x_2 удовлетворяют условию $x_1<2<3<x_2$.

$$x_1<\alpha<\beta<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a\cdot f(\alpha)<0, \\ a\cdot f(\beta)<0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-2)(4a-20)<0, \\ (a-2)(7a-36)<0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\in(2;5) \\ a\in(2;5\frac{1}{7}) \end{cases}$$

Если a=2, то уравнение имеет 1 корень, что не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a\in(2;\,5)$

Пример 8

При каких *a* неравенство $(a^2-1)x^2+2(a-1)x+1>0$ выполняется для любого значения *x*?

Если a=1, то неравенство выполняется всегда.

Если a=-1, то неравенство выполняется не для всех x.

Если a – другое:

$$\begin{cases} a^2-1>0, \\ (a-1)^2-a^2+1<0. \end{cases}$$

Пример 8

При каких *a* неравенство $(a^2-1)x^2+2(a-1)x+1>0$ выполняется для любого значения *x*?

Если a=1, то неравенство выполняется всегда.

Если a=-1, то неравенство выполняется не для всех x.

Если a – другое:

$$\begin{cases} a^2-1>0, \\ (a-1)^2-a^2+1<0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty) \\ a\in(1;+\infty) \end{cases}$$

Ответ: $[1;\,\infty)$.

Домашнее задание

а) Найти все значения параметра а, при которых уравнение $ax^2 - 2x + 1 = 0$ имеет 2 различных корня.

б) Найти все значения параметра а, при которых уравнение $(a+2)x^2 + 2(a+2)x + 2 = 0$ не имеет действительных корней.

Ответ: а) $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$. б) $[-2; 0)$.