

Уравнения и неравенства с модулями

Определение модуля

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Например, $|5| = 5$,
 $|-3| = -(-3) = 3$,
 $|0| = 0$.

Свойства модуля:

$$1^0. |a| \geq 0$$

$$2^0. |a| = |-a|$$

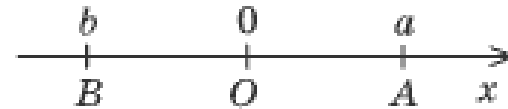
$$3^0. |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$4^0. \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$5^0. |a|^2 = a^2$$

$$6^0. |a + b| \leq |a| + |b|$$

Геометрический смысл модуля



$$|a| = OA, |b| = OB$$

$$|a - b| = AB$$

На координатной прямой модуль — это расстояние от начала координат до точки, изображающей это число.

Модуль разности двух чисел a и b — это расстояние между точками a и b на координатной прямой

Уравнения с модулем

$$1. |f(x)| = a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{cases}$$

$$2. |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x). \end{cases} \end{cases}$$

$$3. |f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases}$$

$$4. |f(x)| + |g(x)| = f(x) + g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Уравнения с модулем

$$5. |f(x)| + |g(x)| = f(x) - g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \leq 0. \end{cases}$$

$$6. |f(x)| + |g(x)| = |f(x) + g(x)| \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \geq 0.$$

$$7. |f(x)| + |g(x)| = |f(x) - g(x)| \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \leq 0.$$

1. Модуль равен числу

$$|f(x)| = a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{cases}$$

Найти корни уравнений:

а) $|x| = 3$;

б) $|x| = -5$;

в) $|x - 3| = 5$;

г) $|x^2 - 5x + 4| = 4$.

1. Модуль равен числу

$$|f(x)| = a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{cases}$$

Найти корни уравнений:

а) $|x| = 3; \quad x = \pm 3.$

б) $|x| = -5; \quad \text{корней нет}$

в) $|x - 3| = 5; \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 5, \\ x - 3 = -5 \end{cases} \Rightarrow x = 8; x = -2.$

г) $|x^2 - 5x + 4| = 4. \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 4, \\ x^2 - 5x + 4 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 5) = 0, \\ x^2 - 5x + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0; x = 5.$

2. Модуль функции равен функции

$$2. |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases} \end{cases}$$

Найти корни уравнения:

а) $|2 - x| = 5 - 4x$;

б) $|x^2 - 6x + 7| = x + 1$;

в) $|2x + 1| = 2x^2 + 1$.

2. Модуль функции равен функции

$$2. |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases} \end{cases}$$

Найти корни уравнения:

$$a) |2-x| = 5-4x; \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0, \\ 2-x = 5-4x; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2, \\ x = 1; \end{cases} \quad \Rightarrow x = 1.$$
$$\begin{cases} 2-x < 0, \\ -2+x = 5-4x. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x = 7/5. \end{cases}$$

$$б) |x^2 - 6x + 7| = x + 1;$$

$$в) |2x + 1| = 2x^2 + 1.$$

2. Модуль функции равен функции

$$2. |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases} \end{cases}$$

Найти корни уравнения:

$$б) |x^2 - 6x + 7| = x + 1; \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ \begin{cases} x^2 - 6x + 7 = x + 1, \\ x^2 - 6x + 7 = -x - 1. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ \begin{cases} x^2 - 7x + 6 = 0, \\ x^2 - 5x + 8 = 0. \end{cases} \end{cases}$$

$$в) |2x + 1| = 2x^2 + 1.$$

2. Модуль функции равен функции

$$2. |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases} \end{cases}$$

Найти корни уравнения:

$$б) |x^2 - 6x + 7| = x + 1; \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ \begin{cases} x^2 - 6x + 7 = x + 1, \\ x^2 - 6x + 7 = -x - 1. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ \begin{cases} x^2 - 7x + 6 = 0, \\ x^2 - 5x + 8 = 0. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ \begin{cases} x = 6, \Rightarrow x = 1, x = 6. \\ x = 1. \end{cases} \end{cases}$$

$$в) |2x + 1| = 2x^2 + 1.$$

3. Модуль равен модулю

$$3. |f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases}$$

Найти корни уравнения:

$$|3x^2 + 5x - 9| = |6x + 15|$$

3. Модуль равен модулю

$$3. |f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases}$$

Найти корни уравнения:

$$|3x^2 + 5x - 9| = |6x + 15| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 5x - 9 = 6x + 15, \\ 3x^2 + 5x - 9 = -6x - 15. \end{cases}$$

3. Модуль равен модулю

$$3. |f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases}$$

Найти корни уравнения:

$$|3x^2 + 5x - 9| = |6x + 15| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 5x - 9 = 6x + 15, \\ 3x^2 + 5x - 9 = -6x - 15. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - x - 24 = 0, \\ 3x^2 + 11x + 6 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2\frac{2}{3}; x = 3. \\ x = -\frac{2}{3}; x = -3. \end{cases}$$

4. Два или несколько модулей

Найти корни уравнения:

$$a) |x - 3| + |x + 5| = 8$$

$$б) |x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$$

1. Находим, когда подмодульные выражения равны нулю.
2. Отмечаем эти значения на числовой прямой и, **в полученных интервалах, определяем знаки подмодульных выражений.**
3. На каждом полученном интервале раскрываем модули в соответствии с пунктом 2, и решаем полученные уравнения. **Корни уравнений должны принадлежать рассматриваемому промежутку.**
4. Объединяем решения уравнений.

4. Два или несколько модулей

Найти корни уравнения:

$$a) |x - 3| + |x + 5| = 8$$



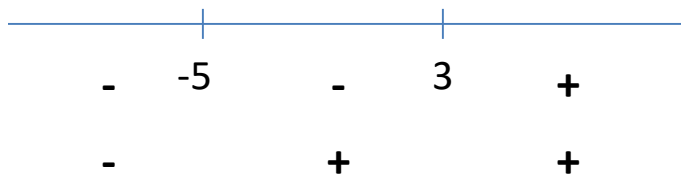
1. Находим, когда подмодульные выражения равны нулю.
2. Отмечаем эти значения на числовой прямой и, в полученных интервалах, определяем знаки подмодульных выражений.
3. На каждом полученном интервале раскрываем модули в соответствии с пунктом 2, и решаем полученные уравнения. **Корни уравнений должны принадлежать рассматриваемому промежутку.**
4. Объединяем решения уравнений.

$$б) |x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$$

4. Два или несколько модулей

Найти корни уравнения:

$$a) |x - 3| + |x + 5| = 8$$



1) $x < -5$; 2) $-5 \leq x < 3$; 3) $x \geq 3$

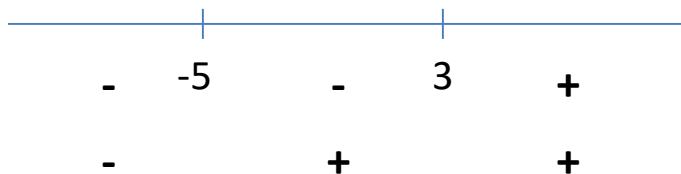
$$b) |x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$$

1. Находим, когда подмодульные выражения равны нулю.
2. Отмечаем эти значения на числовой прямой и, в полученных интервалах, определяем знаки подмодульных выражений.
3. На каждом полученном интервале раскрываем модули в соответствии с пунктом 2, и решаем полученные уравнения. **Корни уравнений должны принадлежать рассматриваемому промежутку.**
4. Объединяем решения уравнений.

4. Два или несколько модулей

Найти корни уравнения:

$$a) |x - 3| + |x + 5| = 8$$



$$1) \begin{cases} x < -5, \\ -x + 3 - x - 5 = 8. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$2) \begin{cases} -5 \leq x < 3, \\ -x + 3 + x + 5 = 8. \end{cases} \Leftrightarrow$$

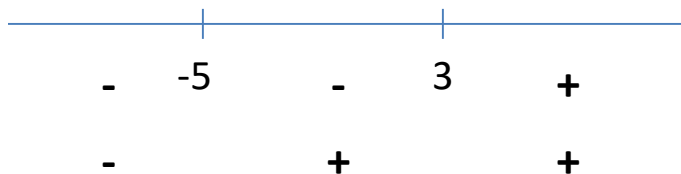
$$3) \begin{cases} x \geq 3, \\ x - 3 + x + 5 = 8. \end{cases} \Leftrightarrow$$

1. Находим, когда подмодульные выражения равны нулю.
2. Отмечаем эти значения на числовой прямой и, **в полученных интервалах, определяем знаки подмодульных выражений.**
3. На каждом полученном интервале раскрываем модули в соответствии с пунктом 2, и решаем полученные уравнения. **Корни уравнений должны принадлежать рассматриваемому промежутку.**
4. Объединяем решения уравнений.

4. Два или несколько модулей

Найти корни уравнения:

$$a) |x - 3| + |x + 5| = 8$$



$$1) \begin{cases} x < -5, \\ -x + 3 - x - 5 = 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -5, \\ x = -5. \end{cases} \Rightarrow \text{решений нет.}$$

$$2) \begin{cases} -5 \leq x < 3, \\ -x + 3 + x + 5 = 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x < 3, \\ x \in R. \end{cases} \Rightarrow -5 \leq x < 3.$$

$$3) \begin{cases} x \geq 3, \\ x - 3 + x + 5 = 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x = 3. \end{cases} \Rightarrow x = 3.$$

Ответ : $[-5; 3]$.

1. Находим, когда подмодульные выражения равны нулю.
2. Отмечаем эти значения на числовой прямой и, в полученных интервалах, определяем знаки подмодульных выражений.
3. На каждом полученном интервале раскрываем модули в соответствии с пунктом 2, и решаем полученные уравнения. **Корни уравнений должны принадлежать рассматриваемому промежутку.**
4. Объединяем решения уравнений.

5. «Модуль от модуля»

Найти корни уравнения:

$$\left| |3 - x| - 2x + 1 \right| = 4x - 10$$

Сначала нужно раскрыть внешний модуль, а затем раскрывать внутренний модуль.

5. «Модуль от модуля»

Найти корни уравнения:

Сначала нужно раскрыть внешний модуль, а затем раскрывать внутренний модуль.

$$||3 - x| - 2x + 1| = 4x - 10 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 10 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} |3 - x| - 2x + 1 = 4x - 10, \\ |3 - x| - 2x + 1 = -4x + 10. \end{array} \right. \end{cases}$$

5. «Модуль от модуля»

Найти корни уравнения:

Сначала нужно раскрыть внешний модуль, а затем раскрывать внутренний модуль.

$$||3 - x| - 2x + 1| = 4x - 10 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 10 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} |3 - x| - 2x + 1 = 4x - 10, \Leftrightarrow \\ |3 - x| - 2x + 1 = -4x + 10. \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{5}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} |3 - x| = 6x - 11, \\ |3 - x| = -2x + 9. \end{array} \right. \end{cases}$$

5. «Модуль от модуля»

Найти корни уравнения:

Сначала нужно раскрыть внешний модуль, а затем раскрывать внутренний модуль.

$$||3 - x| - 2x + 1| = 4x - 10 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 10 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} |3 - x| - 2x + 1 = 4x - 10, \Leftrightarrow \\ |3 - x| - 2x + 1 = -4x + 10. \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{5}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} |3 - x| = 6x - 11, \Rightarrow \\ |3 - x| = -2x + 9. \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \Rightarrow x = 4. \\ x = 4 \end{array} \right. \end{cases}$$

Неравенства с модулем

$$1) |f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x). \end{cases}$$

$$2) |f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x). \end{cases}$$

$$3) |f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x).$$

1. Модуль меньше функции

$$1) |f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x). \end{cases}$$

Решить неравенство:

$$a) |2x + 3| \leq x + 7;$$

$$б) |x^2 + 2x - 3| + 3(x + 1) < 0.$$

1. Модуль меньше функции

$$1) |f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x). \end{cases}$$

Решить неравенство:

$$a) |2x + 3| < x + 7; \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 < x + 7, \\ 2x + 3 > -x - 7. \end{cases}$$

$$б) |x^2 + 2x - 3| + 3(x + 1) < 0.$$

1. Модуль меньше функции

$$1) |f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x). \end{cases}$$

Решить неравенство:

$$a) |2x + 3| < x + 7; \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 < x + 7, \\ 2x + 3 > -x - 7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4, \\ x > -\frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\frac{10}{3}; 4\right)$$

$$б) |x^2 + 2x - 3| + 3(x + 1) < 0.$$

2. Модуль больше функции

$$1) |f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x). \end{cases}$$

Решить неравенство:

$$a) |3x + 1| > 5 - 4x;$$

2. Модуль больше функции

$$1) |f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x). \end{cases}$$

Решить неравенство:

$$a) |3x+1| > 5-4x; \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 > 5-4x, \\ 3x+1 < -5+4x. \end{cases}$$

2. Модуль больше функции

$$1) |f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x). \end{cases}$$

Решить неравенство:

$$a) |3x + 1| > 5 - 4x; \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 > 5 - 4x, \\ 3x + 1 < -5 + 4x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{4}{7}, \\ x > 6. \end{cases} \Rightarrow$$

$$x \in \left(\frac{4}{7}; +\infty\right)$$

3. Модуль больше модуля

$$3) |f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x).$$

Решить неравенство:

$$a) |x + 2| \geq |1 - 2x|;$$

$$б) |x^2 + x + 1| \leq |x^2 + 3x + 4|$$

3. Модуль больше модуля

$$3) |f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x).$$

Решить неравенство:

$$a) |x + 2| \geq |1 - 2x|; \Leftrightarrow (x + 2)^2 \geq (1 - 2x)^2 \Leftrightarrow (x + 2)^2 - (1 - 2x)^2 \geq 0$$

$$б) |x^2 + x + 1| \leq |x^2 + 3x + 4|$$

3. Модуль больше модуля

$$3) |f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x).$$

Решить неравенство:

$$a) |x + 2| \geq |1 - 2x|; \Leftrightarrow (x + 2)^2 \geq (1 - 2x)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x - 3 \leq 0$$

$$3x^2 - 8x - 3 = 0$$

$$б) |x^2 + x + 1| \leq |x^2 + 3x + 4|$$

3. Модуль больше модуля

$$3) |f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x).$$

Решить неравенство:

$$a) |x + 2| \geq |1 - 2x|; \Leftrightarrow (x + 2)^2 \geq (1 - 2x)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x - 3 \leq 0$$

$$3x^2 - 8x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, x = -\frac{1}{3}$$

$$б) |x^2 + x + 1| \leq |x^2 + 3x + 4|$$

3. Модуль больше модуля

$$3) |f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x).$$

Решить неравенство:

$$a) |x + 2| \geq |1 - 2x|; \Leftrightarrow (x + 2)^2 \geq (1 - 2x)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x - 3 \leq 0$$

$$3x^2 - 8x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, x = -\frac{1}{3}$$

$$x \in [-\frac{1}{3}; 3].$$

$$б) |x^2 + x + 1| \leq |x^2 + 3x + 4|$$

Домашнее задание

$$a) |2x + 1| = 2x^2 + 1;$$

$$б) |x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4;$$

$$в) |x^2 + 2x - 3| + 3(x + 1) < 0;$$

$$г) |5x + 3| < |2x - 1|.$$

Ответы: а) 0; 1. б) $x \in [1; 2] \cup \{5\}$. в) $x \in (-5; -2)$. г) $x \in (-4/3; -2/7)$.