# Планиметрия. Многоугольники и их свойства.

**Прямоугольный треугольник.**

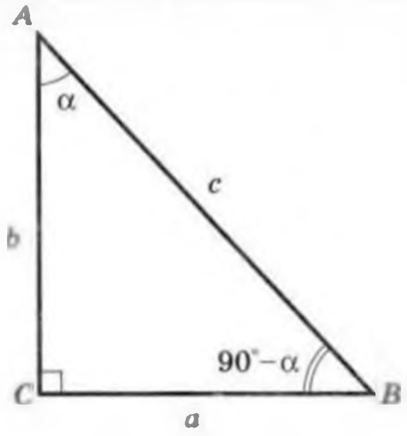
**Равнобедренный треугольник.**

**Треугольник общего вида.**

**Параллелограмм.**

**Трапеция.**

# СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА




$\angle C = 90°$; $a$, $b$ — катеты, $c$ — гипотенуза; $\angle A = \alpha$

$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$ — теорема Пифагора

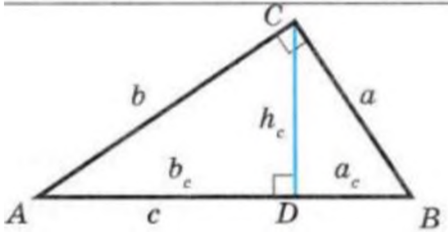
$\boxed{\angle B = 90° - \alpha}$

$\boxed{c > a,\ c > b}$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\quad \cos\alpha = \frac{b}{c};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b};\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

$$a = c \cdot \sin\alpha$$
$$b = c \cdot \cos\alpha$$
$$a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

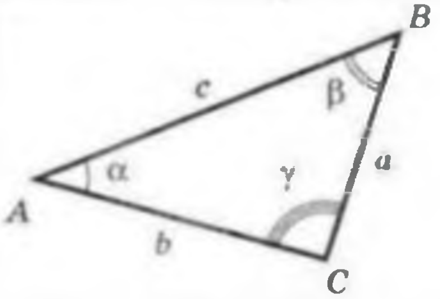



$CD$ — высота

$$h_c^2 = a_c \cdot b_c$$
$$a^2 = c \cdot a_c$$
$$b^2 = c \cdot b_c$$

$$\Delta ACD \sim \Delta ABC$$
$$\Delta CBD \sim \Delta ABC$$
$$\Delta ACD \sim \Delta CBD$$

# СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРОИЗВОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ




**Теорема синусов**

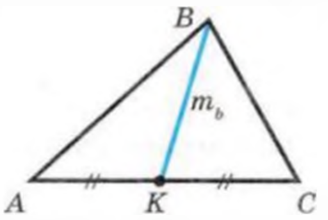
$$\boxed{\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R}$$

$R$ — радиус описанной окружности

**Теорема косинусов**

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$$

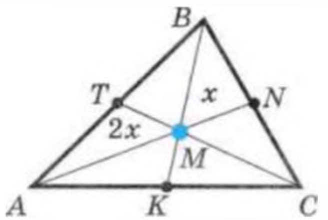
# МЕДИАНА ТРЕУГОЛЬНИКА




**Определение.** ***Медиана треугольника*** — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

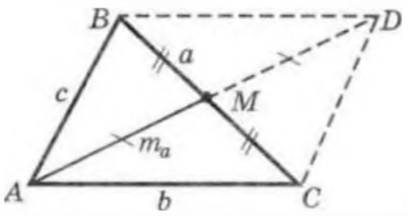
| $BK$ — медиана | $K$ — середина $AC$ |
|---|---|

## Свойства

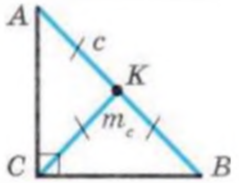



1. Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая каждую медиану делит в отношении 2:1, считая от вершины.

| $M$ — точка пересечения медиан (центр тяжести треугольника) | $\frac{AM}{MN}=\frac{BM}{MK}=\frac{CM}{MT}=\frac{2}{1}$ |
|---|---|

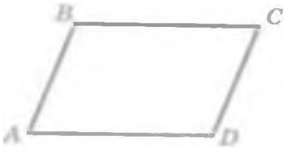



2. $\boxed{m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}$ Если в условии геометрической задачи рассматривается медиана треугольника, то часто удобно продолжить медиану за сторону и дополнить рисунок до параллелограмма.




3. $\boxed{m_c=\frac{1}{2}c}$ В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

# Параллелограмм




**Определение.** Четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны, называют ***параллелограммом***.

$ABCD$ — параллелограмм $\Leftrightarrow$ $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$


## Свойства

1. **Если** $ABCD$ — параллелограмм,
**то** $AB = DC$; $AD = BC$;
$\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$.

*У параллелограмма противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны.*


2. **Если** $ABCD$ — параллелограмм и $BD$ — диагональ,
**то** $\triangle ABD = \triangle CDB$.

*Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.*

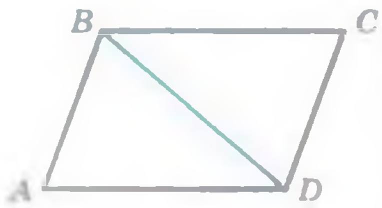
## Признаки

1. **Если** $ABCD$ — четырехугольник и $BC \parallel AD$, $BC = AD$,
**то** $ABCD$ — параллелограмм.

*Если в четырехугольнике две стороны параллельны и равны, то он — параллелограмм.*

2. **Если** $ABCD$ — четырехугольник и $AB = DC$, $AD = BC$,
**то** $ABCD$ — параллелограмм.

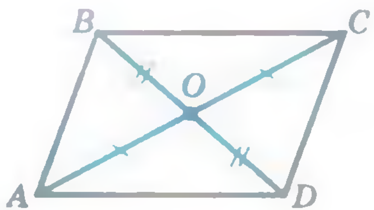
*Если в четырехугольнике противолежащие стороны попарно равны, то он — параллелограмм.*




2. **Если** $ABCD$ — параллелограмм и $BD$ — диагональ,

**то** $\Delta\ ABD = \Delta\ CDB$.

*Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.*




3. **Если** $ABCD$ — параллелограмм, $AC$ и $BD$ — диагонали,

**то** $AO = OC$; $BO = OD$.

*Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.*

3. **Если** $ABCD$ — четырехугольник и $AO = OC$, $BO = OD$,

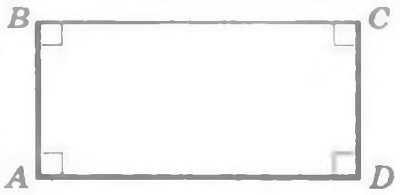
**то** $ABCD$ — параллелограмм.

*Если диагонали четырехугольника в точке пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.*

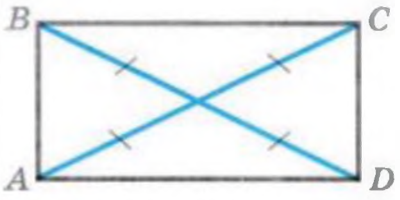
4. $\boxed{AC^2 + BD^2 = 2\,(AD^2 + AB^2)}$

*Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.*

## Прямоугольник

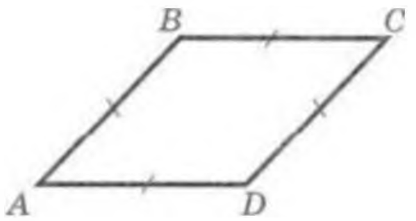



**Определение.** Параллелограмм, у которого все углы прямые, называют ***прямоугольником***.

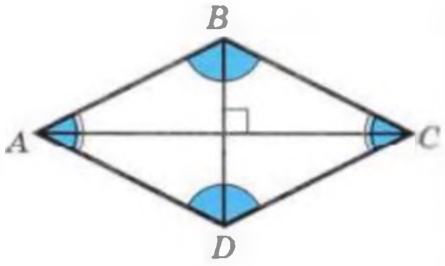



| Свойства | Признаки |
|---|---|
| 1. Все свойства параллелограмма.<br>2. **Если** $ABCD$ — прямоугольник,<br>**то** $AC = BD$ (диагонали прямоугольника равны). | 1. **Если** $ABCD$ — параллелограмм и $\angle A = 90°$,<br>**то** $ABCD$ — прямоугольник.<br>2. **Если** $ABCD$ — параллелограмм и $AC = BD$,<br>**то** $ABCD$ — прямоугольник. |

# Ромб

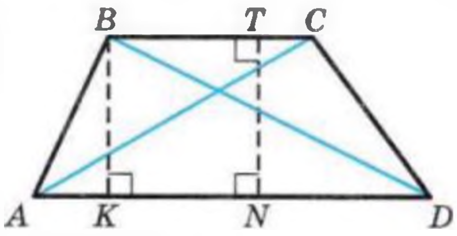



**Определение.** Параллелограмм, у которого все стороны равны, называют ***ромбом***.




| Свойства | Признаки |
|---|---|
| 1. Все свойства параллелограмма.<br><br>2. **Если** $ABCD$ — ромб, $AC$ и $BD$ — диагонали,<br>**то:** а) $AC \perp BD$ — *диагонали перпендикулярны*;<br>**б) диагонали являются биссектрисами углов ромба.** | 1. **Если** $ABCD$ — четырехугольник и $AB = AD = BC = CD$,<br>**то** $ABCD$ — ромб.<br><br>*Если у четырехугольника все стороны равны, то он — ромб.* |

# ТРАПЕЦИЯ

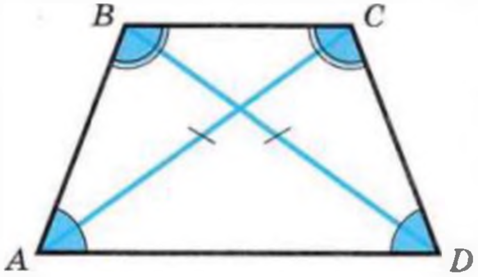



**Определение.** Четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны, называют ***трапецией***.

$\boxed{BC \parallel AD}$

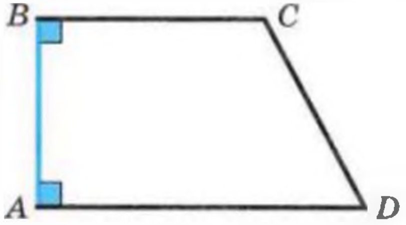
$ABCD$ — трапеция, $AD$ и $BC$ — основания, $AB$ и $CD$ — боковые стороны, $AC$ и $BD$ — диагонали, $BK$ и $TN$ — высоты.

## Частные случаи трапеции




***Равнобокая, или равнобедренная, трапеция*** — трапеция с равными боковыми сторонами ($AB = CD$).

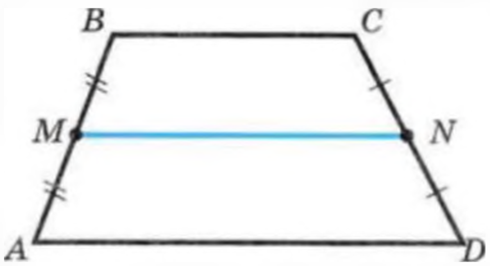
| Свойства | | Признак |
| --- | --- | --- |
| $\angle A = \angle D$ | Углы при основании равны. | **Если** $ABCD$ — трапеция и $\angle A = \angle D$ или $AC = BD$, **то** $AB = CD$ |
| $AC = BD$ | Диагонали равны. | |




***Прямоугольная трапеция*** — трапеция, у которой одна боковая сторона перпендикулярна основаниям.

$$\boxed{h_{\text{прямоуг. трапеции}} = AB}$$

## Средняя линия трапеции




**Определение.** Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называют ***средней линией трапеции.***

$MN$ — средняя линия

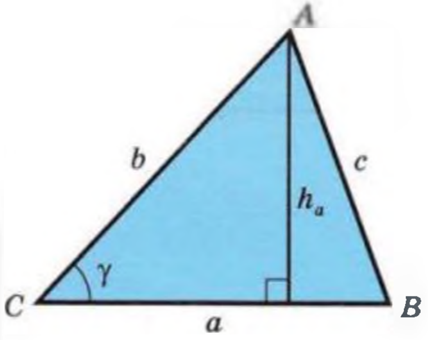
### Свойства

$MN \parallel AD$
$MN \parallel BC$

$$MN = \frac{AD + BC}{2}$$

*Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.*

# ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКОВ




$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$

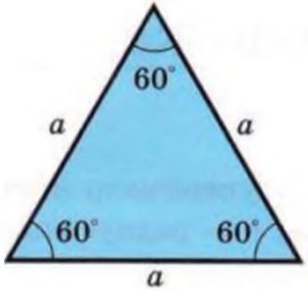
$S = \frac{1}{2} ab\sin\gamma$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — формула Герона $\left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$.

$S = \frac{abc}{4R}$, где $R$ — радиус описанной окружности

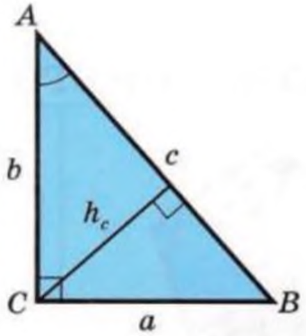
$S = r \cdot p$, где $r$ — радиус вписанной окружности

## Правильный треугольник




$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

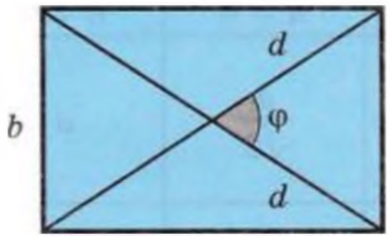
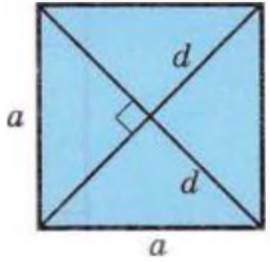
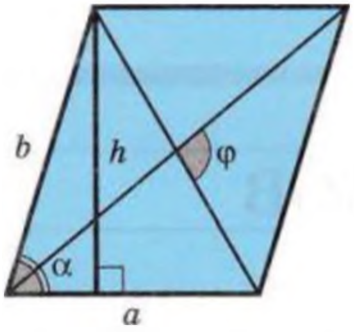
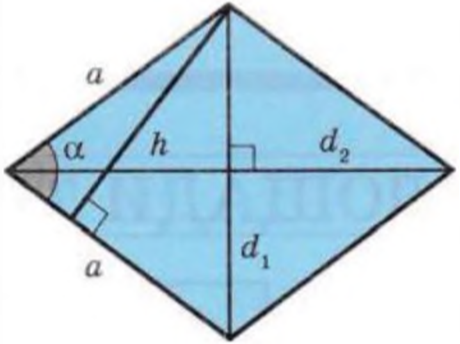
## Прямоугольный треугольник



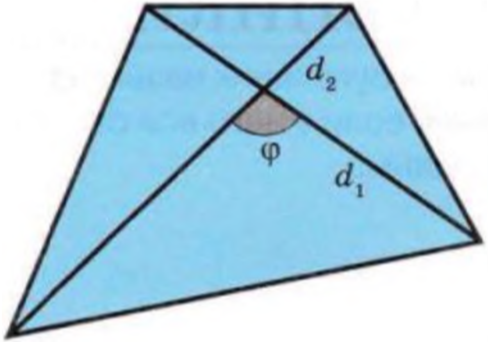

$S = \frac{1}{2} ab$

$S = \frac{1}{2} c \cdot h_c$

$S = \frac{1}{2} bc \sin A$

| Прямоугольник | Квадрат |
|---|---|
|   $S = ab$<br>$S = \frac{1}{2}d^2 \sin\varphi$ |   $S = a^2$<br>$S = \frac{1}{2}d^2$ |
| **Параллелограмм** | **Ромб** |
|   $S = a \cdot h$<br>$S = ab \sin\alpha$<br>$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$ |   $S = a \cdot h$<br>$S = a^2 \sin\alpha$<br>$S = \frac{1}{2}d_1 d_2$ |

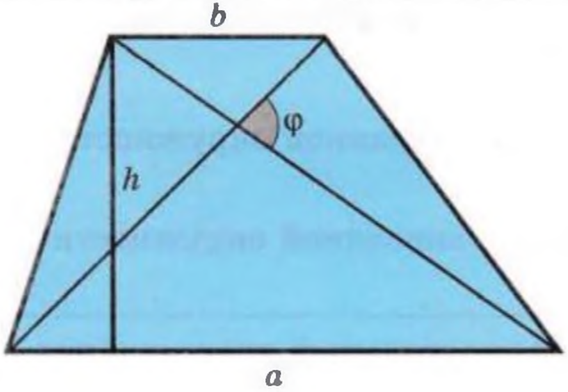
# ПЛОЩАДИ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ




$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

Площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

## Трапеция




$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

$S = m \cdot h$ ($m$ — длина средней линии)

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

Площадь треугольника $ABC$ равна 24; $DE$ – средняя линия, параллельная стороне $AB$. Найдите площадь треугольника $CDE$.

24:4=6 (подобие треугольников,для площадей коэффициент подобия возводится в квадрат)

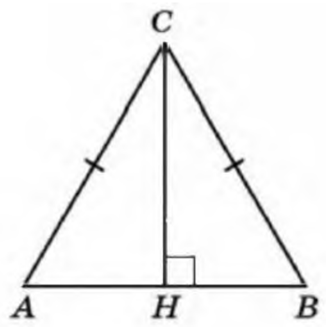
В ромбе $ABCD$ угол $DBA$ равен $13°$. Найдите угол $BCD$. Ответ дайте в градусах.

13*2=26
180-26=154

Стороны параллелограмма равны 24 и 27. Высота, опущенная на меньшую из этих сторон, равна 18. Найдите высоту, опущенную на бо́льшую сторону параллелограмма.

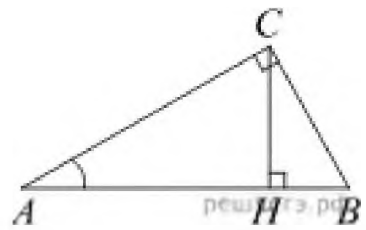
S=24*18=27*h
h=432:27=16

В треугольнике ABC известно, что AC=CB, высота CH равна 9, tgA=1,8. Найдите сторону AB.



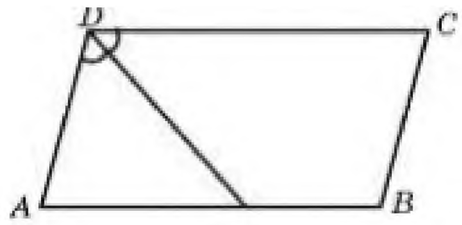

AH=9:1,8=5
AB=2*5=10

В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH – высота, AC=13, tgA=$\frac{5}{12}$. Найти AH.



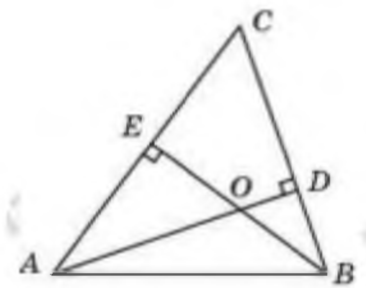

CH=5x
AH=12x
По теор. Пифагора x=1
AH=12

Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 4:3, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 88.




88:2=44=AB+AD=(AE+EB)+AD
AE=4x; EB=3x; AD=4x (ADE - равноб.)
x=4
AB=7*4=28

Два угла треугольника равны 58° и 72°. Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов. Ответ дайте в градусах.

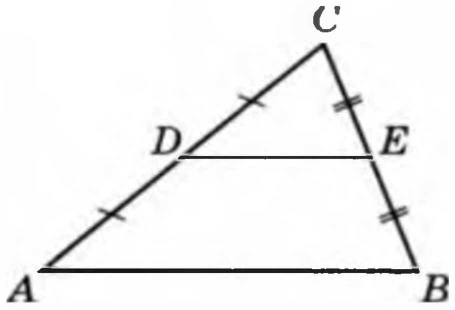



C=180-58-72
EOD=180-C (или 360-90-90-C)
Ответ: 130

**Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 145. Найдите площадь параллелограмма $A'B'C'D'$, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.**

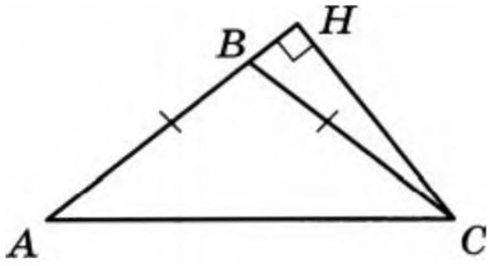
S=145:2=72,5

**В треугольнике $ABC$ средняя линия $DE$ параллельна стороне $AB$. Найдите площадь треугольника $ABC$, если площадь трапеции $ABED$ равна 48.**




трапеция состоит из трех равный тругольников
(если провести доп. сред.линии). Поэтому
48:3=16(площадь каждого)
16*4=64(т.к. весь треугольник состоит их четырех равных треугольников).

**В треугольнике $ABC$ высота $CH$ равна 6, $AB = BC$, $AC = 8$. Найдите синус угла $ACB$.**




углы равноб.треуг. равны.
sinA=6:8=0,75
Ответ:0,75

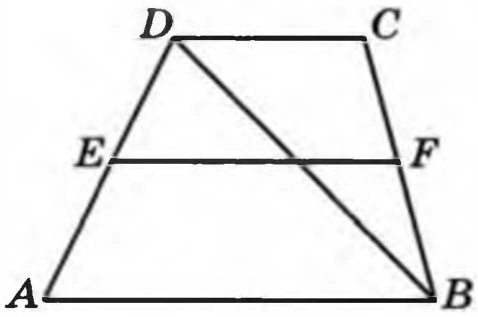
В треугольнике $ABC$ угол $C$ равен 90°, $AB = 20$, tg $B=\frac{4}{3}$. Найдите $BC$.

AC=4x, CB=3x
По теор. Пифагора x=4
BC=3*4=12

В треугольнике $ABC$ угол $C$ равен 90°, $CH$ — высота, $BC = 14$, sin $A=$ 0,5. Найдите $BH$.

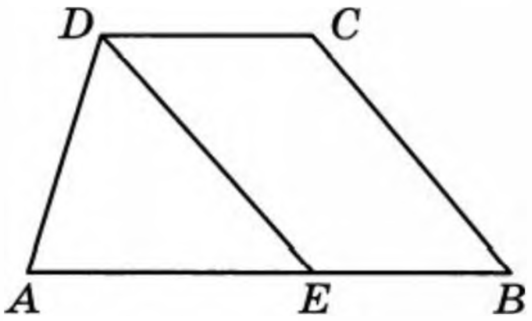
sinA=CB/AB=cosB
cosB=HB/CB
HB=0,5*14=7

**Основания трапеции равны 15 и 26. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.**



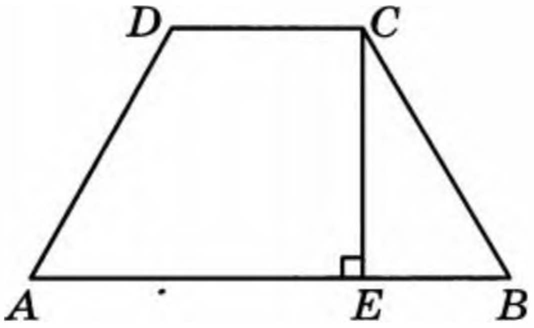

26:2=13 (ср. линия треугольника)

**Прямая, проведённая параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 41, отсекает треугольник, периметр которого равен 83. Найдите периметр трапеции.**




S=83+41+41=165

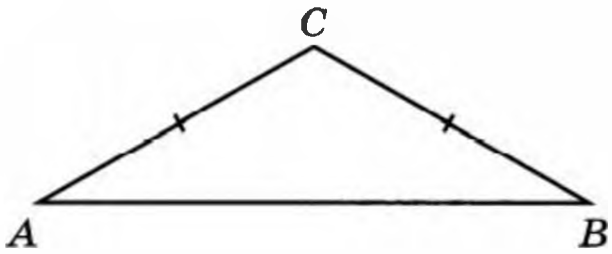
Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 10 и 9. Найдите среднюю линию этой трапеции.




CD=1

Ср.л.=(1+19):2=10

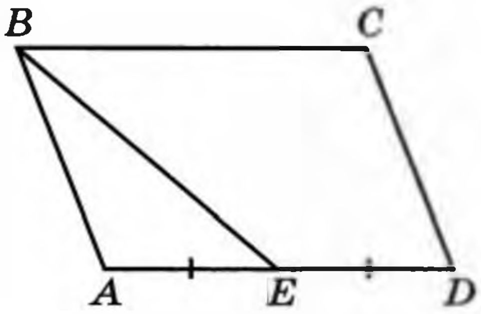
В треугольнике $ABC$ известно, что $AC = BC$, $AB = 20$, $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Найдите длину стороны $AC$.




Выразить косинус угла А, тогда АС=10/cosA.

Ответ:15

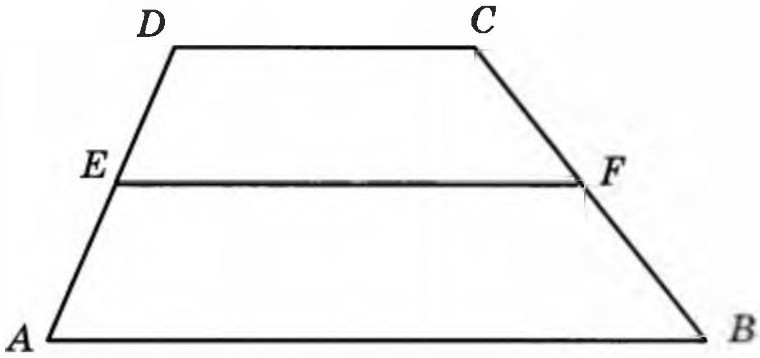
**Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 28. Точка $E$ — середина стороны $AD$. Найдите площадь трапеции $BCDE$.**




Найти площадь треугольника и вычесть из пл. параллелограмма пл. треугольника.

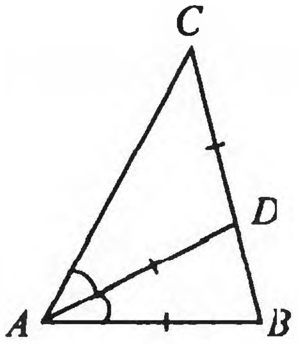
Ответ: 21

**Средняя линия трапеции равна 18, а меньшее основание равно 10. Найдите большее основание трапеции.**



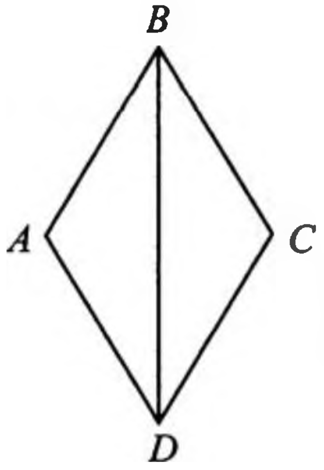

Ответ: 26

В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $AD$ и $AB = AD = CD$ Найдите меньший угол треугольника $ADB$. Ответ дайте в градусах.




уголы C, CAD, DAB равны, обохначим через x. тогда угол CDA=180-2x. тогда угол ADB=180-(180-2x)=2x.
Их суммы углов треугольника x=36.
Ответ:36

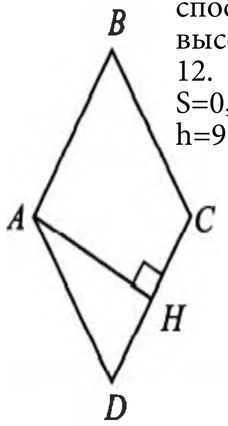
Найдите большую диагональ ромба, сторона которого равна $2\sqrt{3}$, а острый угол равен 60°




Через косинус найти половину диагонали

Ответ: 6

6. Найдите высоту ромба, если большая диагональ равна 16, а сторона равна 10



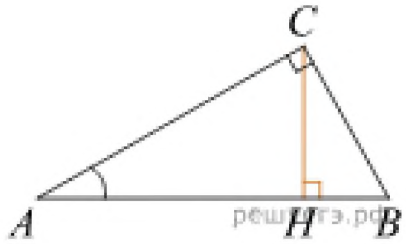

Выражаем площадь двумя способами (через диагонали и через высоту), диагональ меньшая равна 12.

S=0,5*16*12=10*h

h=9,6.

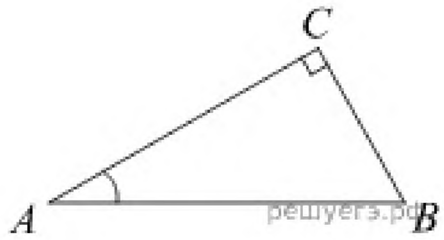
Ответ: 9,6

В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, *CH* – высота, *AB*=13, tg*A*=$\frac{1}{5}$. Найдите *AH*.



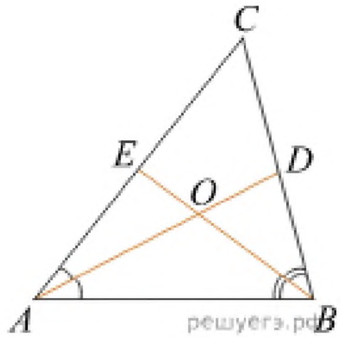

Ответ: 12,5

В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, *AC*=2, sin*A*=$\frac{\sqrt{17}}{17}$. Найдите *BC*.



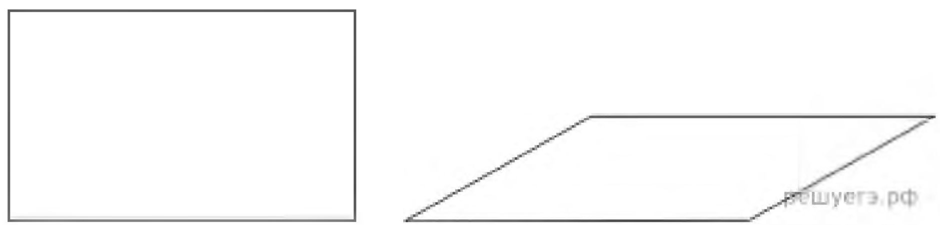

Ответ: 0,5

В треугольнике *ABC* угол *C* равен 58°, *AD* и *BE* – биссектрисы, пересекающиеся в точке *O*. Найдите угол *AOB*. Ответ дайте в градусах.




Ответ: 119.

Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника. Ответ дайте в градусах.




Ответ 30.