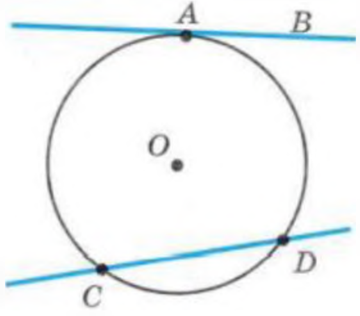
Планиметрия.

Окружность и ее элементы.

1. Центральные и вписанные углы
2. Окружность, касательная, хорда, секущая
3. Вписанные окружности
4. Описанные окружности

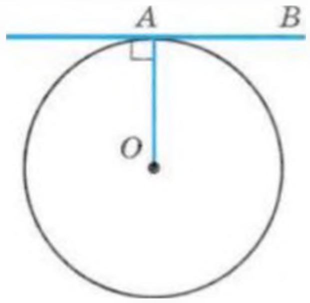
ОКРУЖНОСТЬ. КАСАТЕЛЬНЫЕ И СЕКУЩИЕ



Определение. Прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку, называют ***касательной к окружности***.

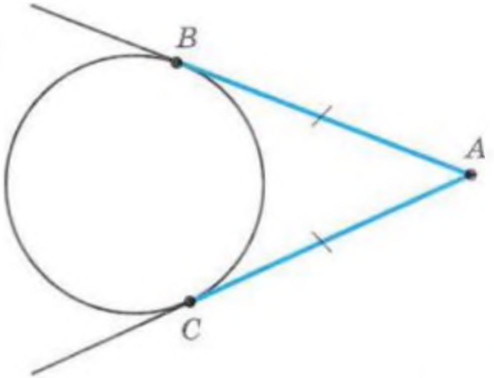
AB — касательная; A — точка касания;
CD — секущая (прямая, имеющая с окружностью две общие точки).

Свойства



$OA \perp AB$

Касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

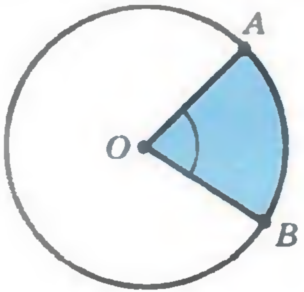


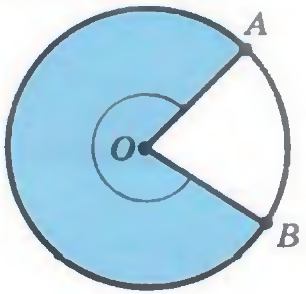
$AB = AC$

(B и C — точки касания)

Если из одной точки к одной окружности проведены две касательные, то отрезки касательных равны между собой.

УГЛЫ В ОКРУЖНОСТИ

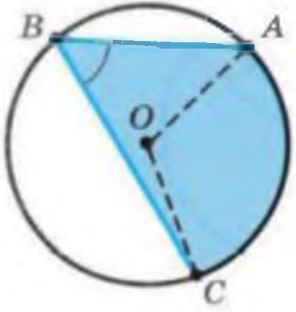




$\angle AOB$ — центральный угол

$\angle AOB = \cup AB$

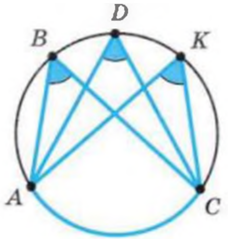
Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается.



$\angle ABC$ — вписанный угол

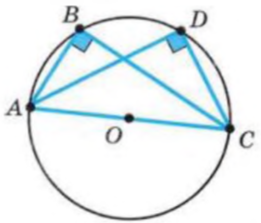
$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC = \frac{1}{2} \angle AOC$

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается, и равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.



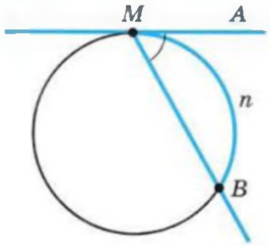
$\angle ABC = \angle ADC = \angle AKC$

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.



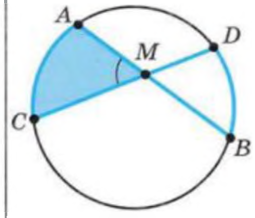
$\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$

Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90°.



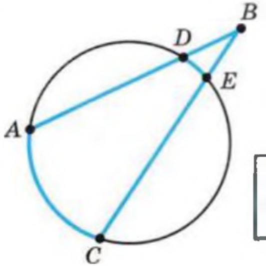
MA — касательная, MB — секущая.

$\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MnB$



AB и CD — хорды

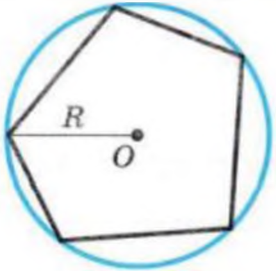
$\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup DB)$



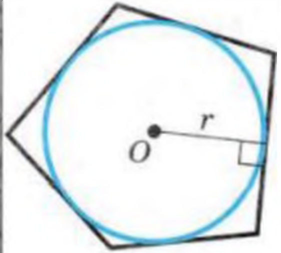
BA и BC — секущие

$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE)$

ВПИСАННЫЙ И ОПИСАННЫЙ МНОГОУГОЛЬНИКИ (описанная и вписанная окружности)



Вписанный многоугольник — все вершины лежат на окружности.



Описанный многоугольник — все стороны являются касательными к окружности.

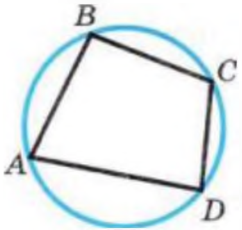
$$\boxed{S_{\text{опис}} = \frac{P \cdot r}{2}},$$

где P — периметр,

r — радиус вписанной окружности.

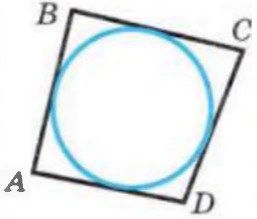
O — точка пересечения биссектрис внутренних углов.

ВПИСАННЫЙ И ОПИСАННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ



$$\boxed{\angle A + \angle C = 180^\circ, \quad \angle B + \angle D = 180^\circ}$$

И наоборот: если у четырехугольника сумма противолежащих углов равна 180°, то около него можно описать окружность.



$$\boxed{AB + CD = BC + AD}$$

(суммы длин противолежащих сторон равны)

И наоборот: если у выпуклого четырехугольника суммы длин противолежащих сторон равны, то в него можно вписать окружность.

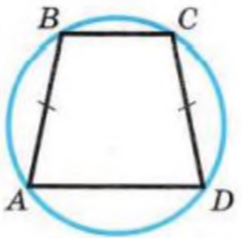
ПРЯМОУГОЛЬНИК

$$R = \frac{1}{2}d$$

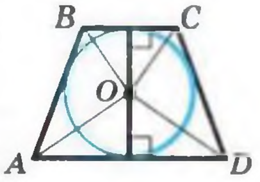
1. Если параллелограмм вписан в окружность, то он — прямоугольник.

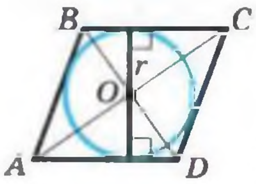
2. Центр окружности, описанной около прямоугольника, — точка пересечения его диагоналей.

ТРАПЕЦИЯ И РОМБ



Если $ABCD$ — вписанная трапеция, то $AB = CD$



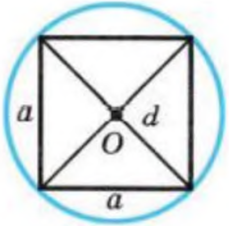


$$d_{\text{впис. окр}} = h$$

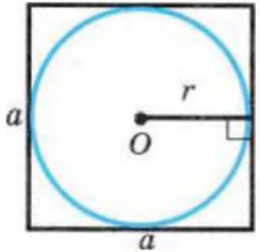
O — точка пересечения биссектрис внутренних углов.

$$\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$$

КВАДРАТ

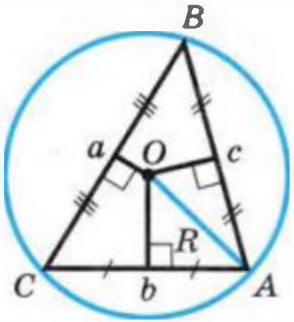


$$R_{\text{опис}} = \frac{1}{2}d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



$$r_{\text{впис}} = \frac{1}{2}a$$

Описанная окружность



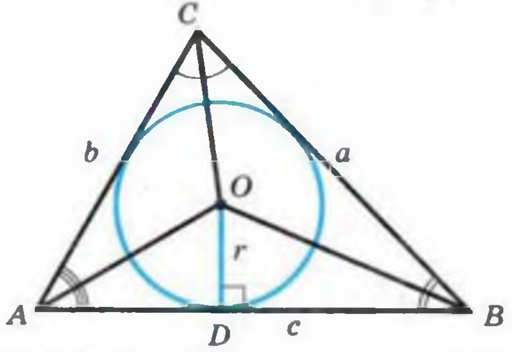
O — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника;

$OA = OB = OC = R$

$$R = \frac{a}{2\sin A}$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

Вписанная окружность

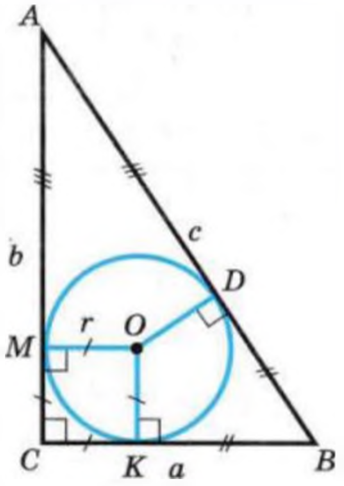


O — точка пересечения биссектрис внутренних углов треугольника;

$OD = r$; $OD \perp AB$

$$\boxed{r = \frac{2S_{\Delta ABC}}{a+b+c}}$$

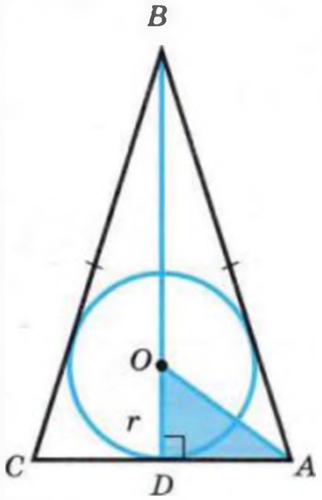
В прямоугольном треугольнике



$$\boxed{r = \frac{a+b-c}{2}}$$

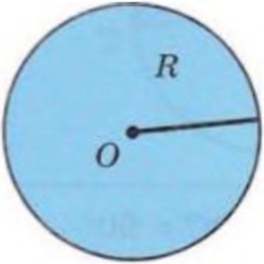
$OK = OM = OD = r$
($OKCM$ — квадрат)

В равнобедренном треугольнике

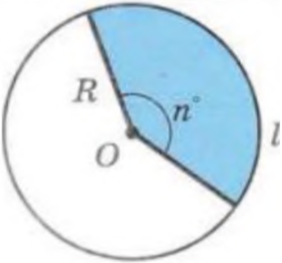


$AB = DC$;
BD — высота, медиана и биссектриса;
AO — биссектриса угла A

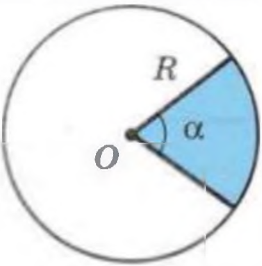
$$\boxed{OD = r}$$



$$\boxed{S = \pi R^2}$$



$$\boxed{S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n}$$



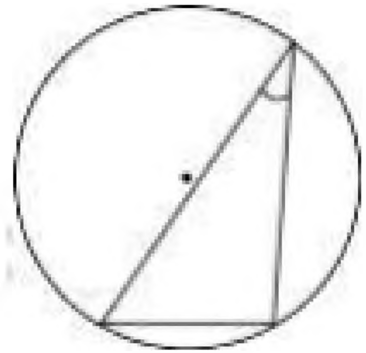
$$S = \frac{\pi R^2}{2\pi} \cdot \alpha =$$

— площадь **круга**

— площадь **кругового сектора**, соответствующего центральному углу в n градусов

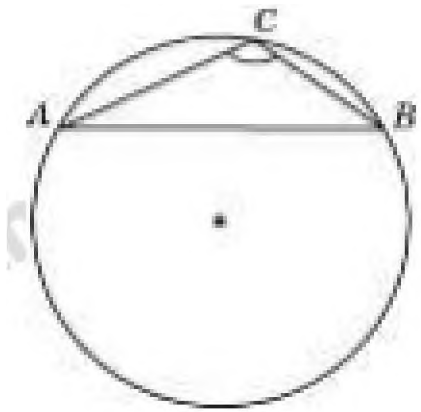
$\boxed{\dfrac{R^2\alpha}{2}}$ — площадь **кругового сектора**, соответствующего центральному углу в α радиан

Найти величину острого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную радиусу окружности. Ответ дайте в градусах.



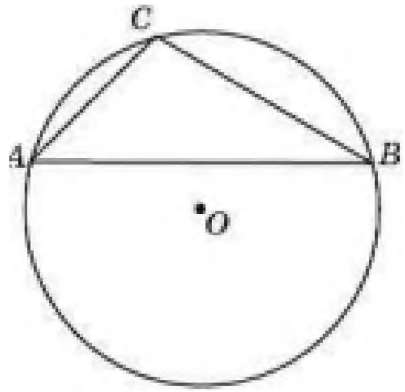
$60:2=30$

Найдите хорду, на которую опирается угол 120°, вписанный в окружность, радиуса $\sqrt{3}$.



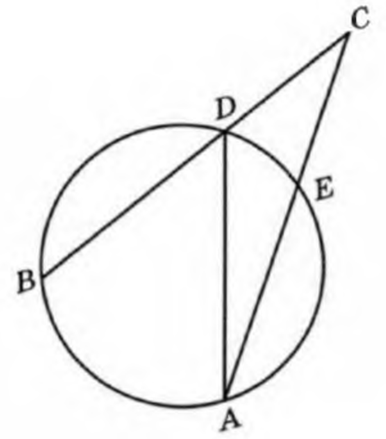
AB=2R*sinC=3 (по теореме синусов)

Хорда АВ делит окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как 5:7. Под каким углом видна эта хорда из точки С, принадлежащей меньшей дуге окружности. Ответ дайте в градусах.



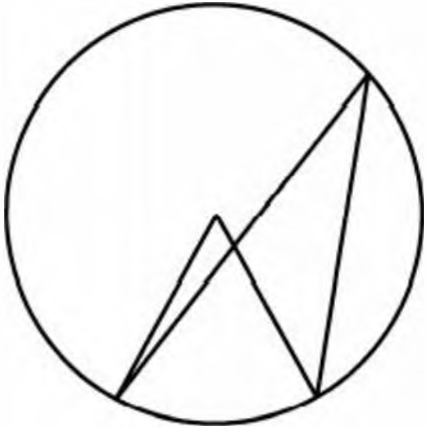
5x+7x=12x=360
x=360:12
x=30 - одна часть
(30*7):2=105 - градусная мера угла С

Градусная мера дуги AB, не содержащей точку D, равна 106°.
Градусная мера дуги DE, не содержащей точку A, равна 48°.
Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



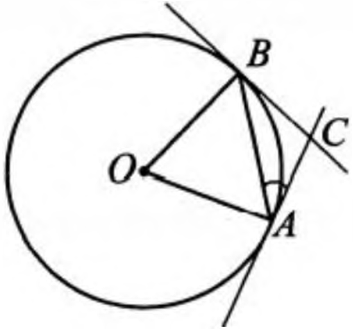
(106-48):2=29 (по свойству секущих, провед. из одной точки)

Найдите центральный угол, если он на 28° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу. Ответ дайте в градусах.



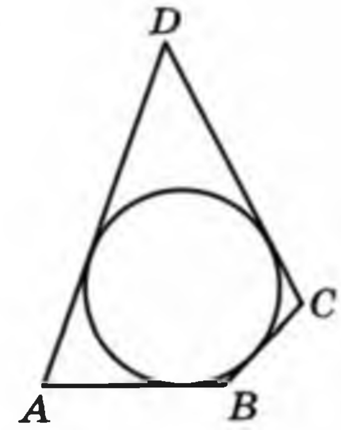
28*2=56

Через точки A и B окружности с центром в точке O проведены касательные AC и BC. Угол CAB равен 42° Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



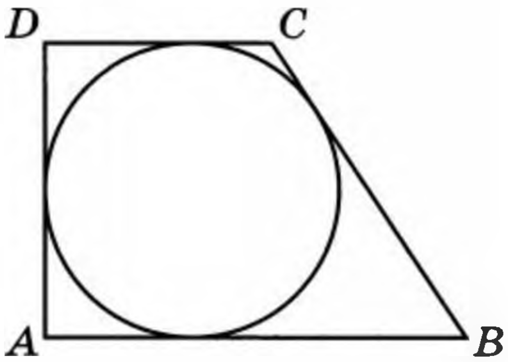
42*2=84 - дуга AB (по свойству секущей и касат.)
Значит и центральный угол O тоже 84

В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 13$, $CD = 18$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.



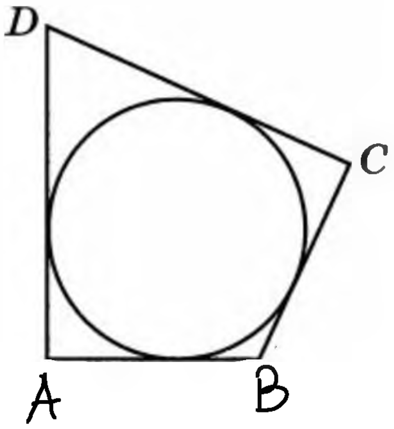
AB+CD=BC+AD
Значит P=2*(AB+CD)=2*31=62

Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 100, её большая боковая сторона равна 37. Найдите радиус окружности.



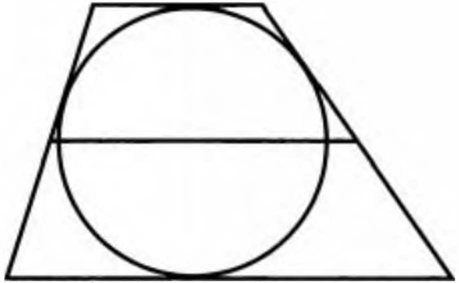
AB+CD=BC+AD
Значит (AD+CB)=100:2
AD=50-CB
r=AD:2=6,5

В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 8$, $BC = 5$ и $CD = 27$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.



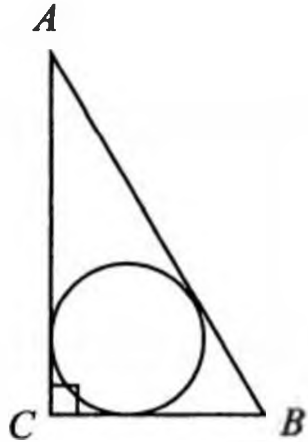
AB+CD=BC+AD
Значит 8+27=5+AD
AD=30

Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 28. Найдите длину её средней линии.



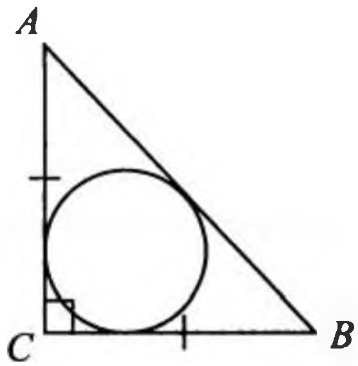
По свойству описанного четырехугольника
сумма оснований трапеции равна половине периметра.
Ср.линия трапеции - половина суммы оснований.
Тогда ср.линия равна 7.

В треугольнике ABC стороны равны 5, 12 и 13 радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



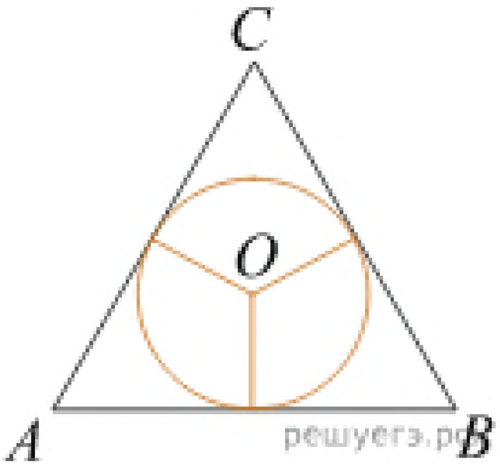
По свойству вписанной окружности в прямоуг. треугольник
r=(AC+CB-AB):2
r=2

Катеты равнобедренного треугольника равны $2 + \sqrt{2}$
Найдите диаметр окружности, вписанной в этот треугольник.



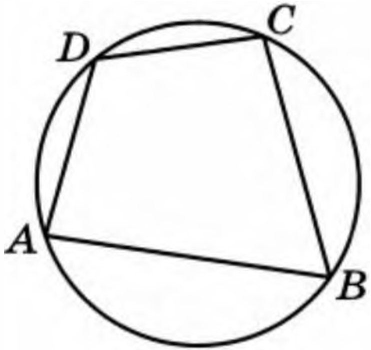
По свойству вписанной окружности в прямоуг. треугольник
r=(AC+CB-AB):2 или тогда d=AC+CB-AB
AB по теореме Пифогора (или как диагональ квадрата)
d=2

Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, основание равно 6. Найдите радиус вписанной окружности.



r=2S/P
S=1/2AB*h=3*4=12
(или S находим по формуле Герона)
r=1,5.

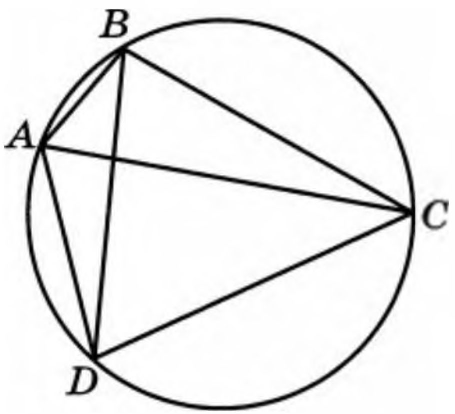
Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 112° и 125°. Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.



180-112=68 (по св-ву четырехугольника, вписанного в окружность)

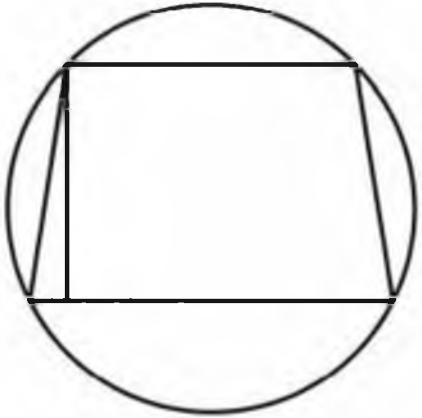
Ответ: 68

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен $106°$, угол CAD равен $69°$. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 37

Основания равнобедренной трапеции равны 24 и 10. Радиус описанной окружности равен 13. Центр окружности лежит внутри трапеции. Найдите высоту трапеции.



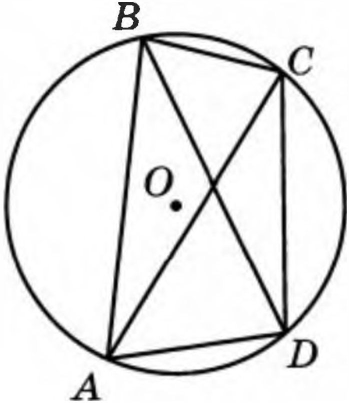
Ответ: 17

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. равен 25°, угол CAD равен 41°. Найдите угол дайте в градусах.

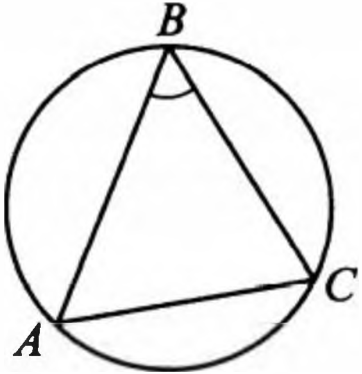
Ответ: 66

Угол ABD

ABC. Ответ



Одна сторона треугольника ABC равна $\sqrt{3}$, радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен 1   Найдите острый угол треугольника, противолежащий этой стороне. Ответ дайте в градусах.

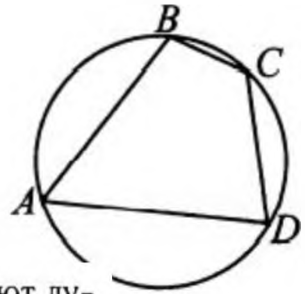


sinB=AC/(2R) (по теореме синусов)

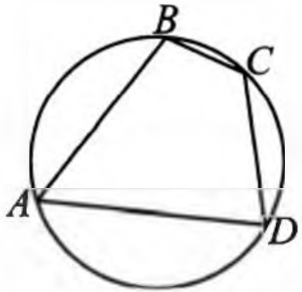
Ответ: 60

Точки A, B, C, D, расположенные на окружности, делят эту окружность на четыре дуги AB, BC, CD и AD, градусные величины которых относятся как $4 : 2 : 3 : 6$ Найдите угол BCD. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 120

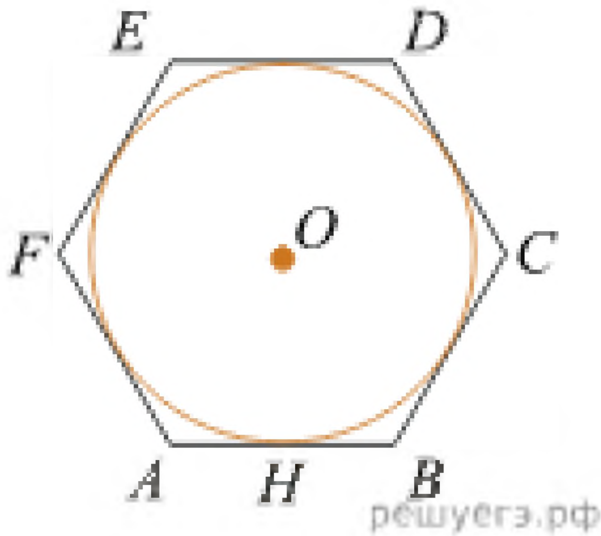


. Стороны AB, BC, CD и AD четырёхугольника $ABCD$ стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно 93°, 47°, 72°, 148° Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



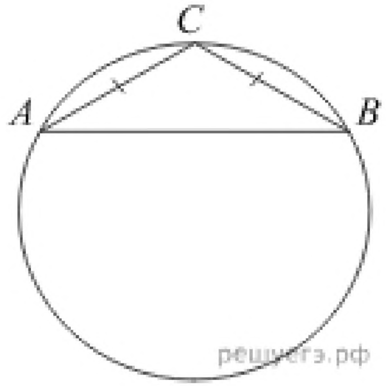
Ответ: 110

Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен $\sqrt{3}$.



Ответ: 2

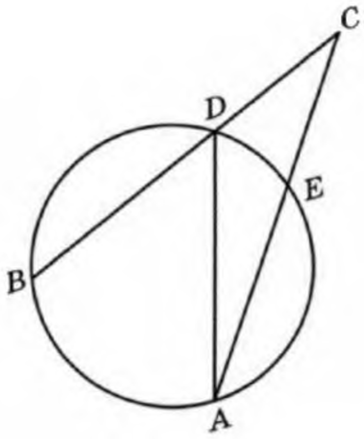
Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 1, угол при вершине, противолежащей основанию, равен 120°. Найдите диаметр окружности этого треугольника.



Ответ: 2

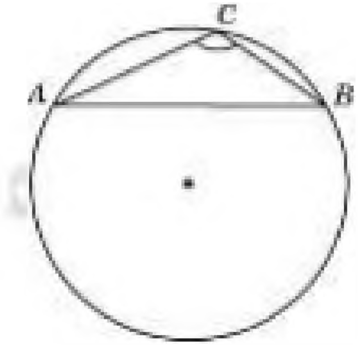
Домашнее задание

1) Угол ACB равен 42°. Градусная мера дуги AB окружности, не содержащей точек D и E, равна 124°. Найдите угол DAE. Ответ дайте в градусах.



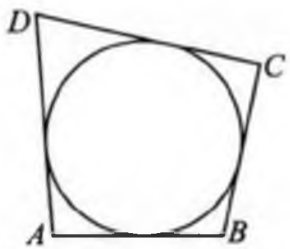
Ответ: 20

2) Найдите хорду, на которую опирается угол 120°, вписанный в окружность, радиуса $2\sqrt{3}$.



Ответ: 6

3) В четырехугольнике ABCD, периметр которого равен 36, вписана окружность. BC=6. Найти AD.



Ответ: 12