

Планиметрия. Многоугольники и их свойства.

Прямоугольный треугольник.

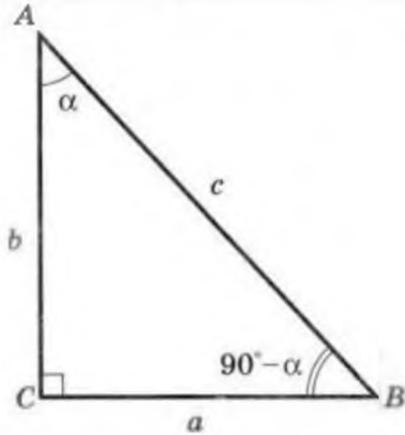
Равнобедренный треугольник.

Треугольник общего вида.

Квадрат, треугольник, параллелограмм, ромб.

Трапеция.

СОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА



$\angle C = 90^\circ$; a, b — катеты, c — гипотенуза; $\angle A = \alpha$

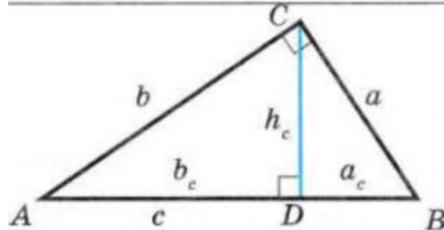
$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{— теорема Пифагора}$$

$$\angle B = 90^\circ - \alpha$$

$$c > a, c > b$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{c}; \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= c \cdot \sin \alpha \\ b &= c \cdot \cos \alpha \\ a &= b \cdot \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

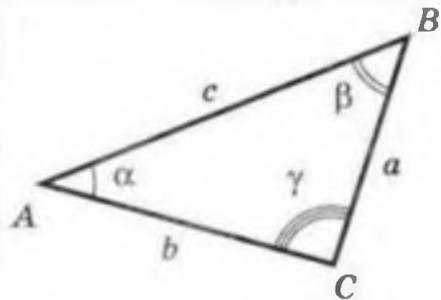


CD — высота

$$\begin{aligned} h_c^2 &= a_c \cdot b_c \\ a^2 &= c \cdot a_c \\ b^2 &= c \cdot b_c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle ACD &\sim \triangle ABC \\ \triangle CBD &\sim \triangle ABC \\ \triangle ACD &\sim \triangle CBD \end{aligned}$$

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРОИЗВОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ



Теорема синусов

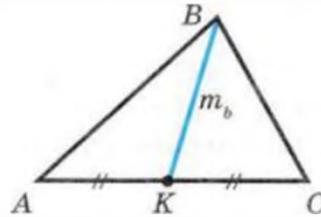
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

R — радиус описанной окружности

Теорема косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

МЕДИАНА ТРЕУГОЛЬНИКА

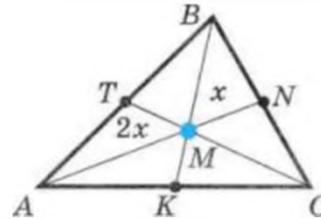


Определение. *Медиана треугольника* — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

BK — медиана

K — середина AC

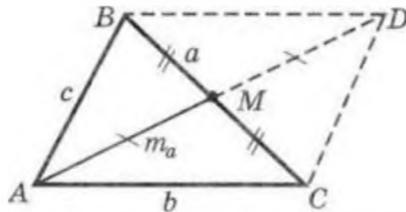
Свойства



1. Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая каждую медиану делит в отношении 2:1, считая от вершины.

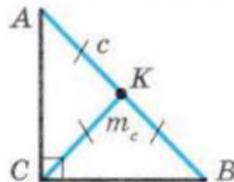
M — точка пересечения медиан (центр тяжести треугольника)

$$\frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MK} = \frac{CM}{MT} = \frac{2}{1}$$



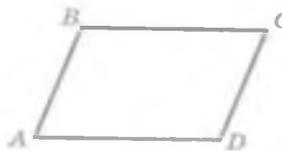
2. $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ Если в условии геометрической задачи

рассматривается медиана треугольника, то часто удобно продолжить медиану за сторону и дополнить рисунок до параллелограмма.



3. $m_c = \frac{1}{2} c$ В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

Параллелограмм

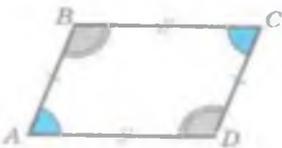


Определение. Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называют **параллелограммом**.

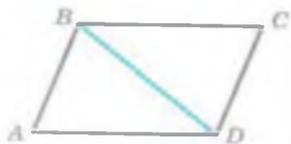
$ABCD$ — параллелограмм



$AB \parallel CD, BC \parallel AD$



У параллелограмма противоположные стороны равны, противоположные углы равны.



2. Если $ABCD$ — параллелограмм и BD — диагональ,
то $\triangle ABD = \triangle CDB$.

Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.

Свойства

1. Если $ABCD$ — параллелограмм,
то $AB = DC; AD = BC;$
 $\angle A = \angle C; \angle B = \angle D.$

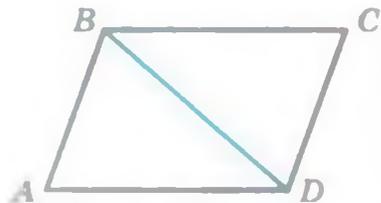
Признаки

1. Если $ABCD$ — четырехугольник и $BC \parallel AD, BC = AD,$
то $ABCD$ — параллелограмм.

Если в четырехугольнике две стороны параллельны и равны, то он — параллелограмм.

2. Если $ABCD$ — четырехугольник и $AB = DC, AD = BC,$
то $ABCD$ — параллелограмм.

Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то он — параллелограмм.



2. Если $ABCD$ — параллелограмм и BD — диагональ,
то $\triangle ABD = \triangle CDB$.

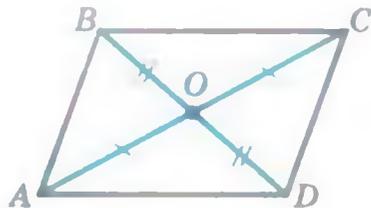
Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.

3. Если $ABCD$ — параллелограмм, AC и BD — диагонали,
то $AO = OC$; $BO = OD$.

Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

3. Если $ABCD$ — четырехугольник и $AO = OC$, $BO = OD$,
то $ABCD$ — параллелограмм.

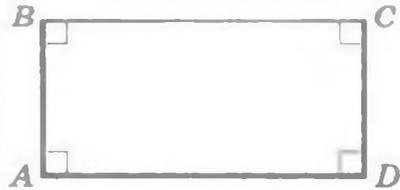
Если диагонали четырехугольника в точке пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.



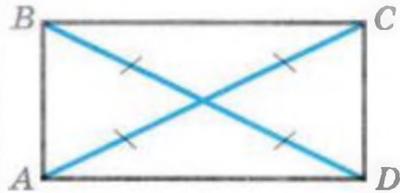
$$4. \quad AC^2 + BD^2 = 2(AD^2 + AB^2)$$

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Прямоугольник

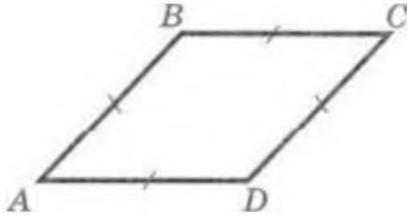


Определение. Параллелограмм, у которого все углы прямые, называют **прямоугольником**.

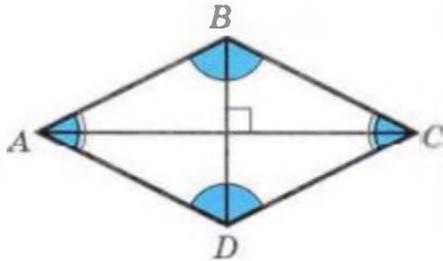


Свойства	Признаки
<p>1. Все свойства параллелограмма.</p> <p>2. Если $ABCD$ — прямоугольник, то $AC = BD$ (диагонали прямоугольника равны).</p>	<p>1. Если $ABCD$ — параллелограмм и $\angle A = 90^\circ$, то $ABCD$ — прямоугольник.</p> <p>2. Если $ABCD$ — параллелограмм и $AC = BD$, то $ABCD$ — прямоугольник.</p>

Ромб

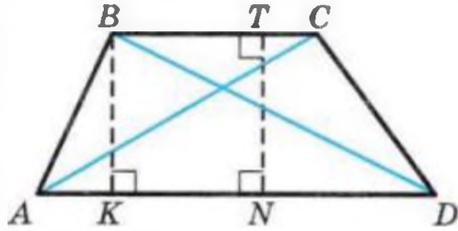


Определение. Параллелограмм, у которого все стороны равны, называют **ромбом**.



Свойства	Признаки
<p>1. Все свойства параллелограмма.</p> <p>2. Если $ABCD$ — ромб, AC и BD — диагонали,</p> <hr/> <p>то: а) $AC \perp BD$ — диагонали перпендикулярны; б) диагонали являются биссектрисами углов ромба.</p>	<p>1. Если $ABCD$ — четырехугольник и $AB = AD = BC = CD$,</p> <hr/> <p>то $ABCD$ — ромб.</p> <p><i>Если у четырехугольника все стороны равны, то он — ромб.</i></p>

ТРАПЕЦИЯ

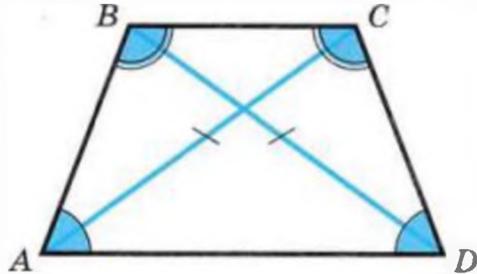


Определение. Четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны, называют **трапецией**.

$$BC \parallel AD$$

$ABCD$ — трапеция, AD и BC — основания, AB и CD — боковые стороны, AC и BD — диагонали, BK и TN — высоты.

Частные случаи трапеции



Равнобокая, или равнобедренная, трапеция — трапеция с равными боковыми сторонами ($AB = CD$).

Свойства

$$\angle A = \angle D$$

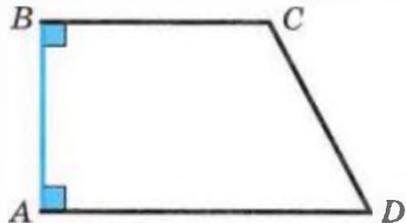
Углы при основании равны.

$$AC = BD$$

Диагонали равны.

Признак

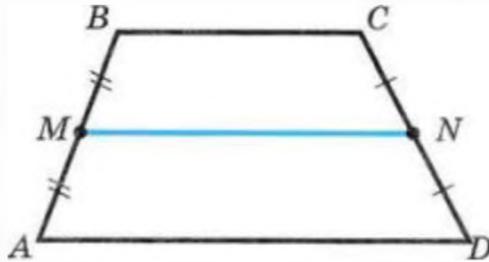
Если $ABCD$ — трапеция и $\angle A = \angle D$ или $AC = BD$, **то** $AB = CD$



Прямоугольная трапеция — трапеция, у которой одна боковая сторона перпендикулярна основаниям.

$$h_{\text{прямоуг. трапеции}} = AB$$

Средняя линия трапеции



Определение. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называют *средней линией трапеции*.

MN — средняя линия

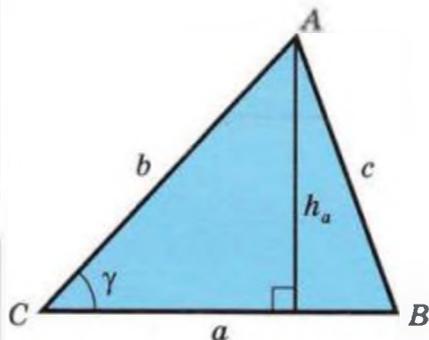
Свойства

$$\begin{aligned} MN &\parallel AD \\ MN &\parallel BC \end{aligned}$$

$$MN = \frac{AD + BC}{2}$$

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_c$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

— формула Герона $\left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$.

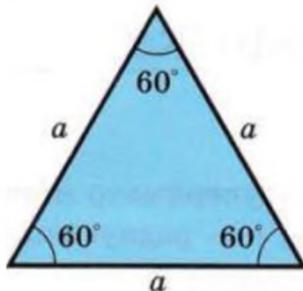
$$S = \frac{abc}{4R}$$

, где R — радиус описанной окружности

$$S = r \cdot p$$

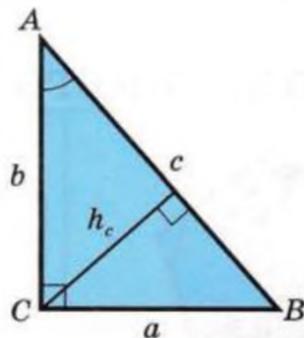
, где r — радиус вписанной окружности

Правильный треугольник



$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

Прямоугольный треугольник

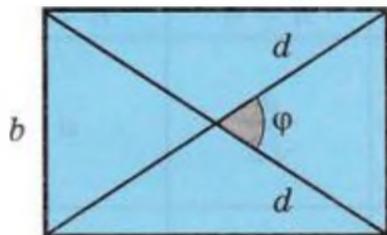


$$S = \frac{1}{2} ab$$

$$S = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

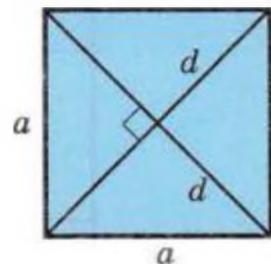
Прямоугольник



$$S = ab$$

$$S = \frac{1}{2}d^2 \sin \varphi$$

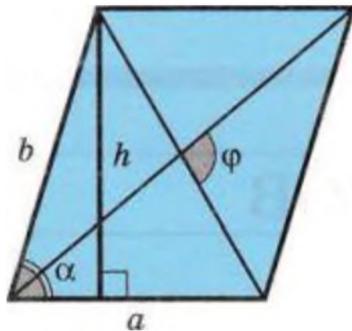
Квадрат



$$S = a^2$$

$$S = \frac{1}{2}d^2$$

Параллелограмм

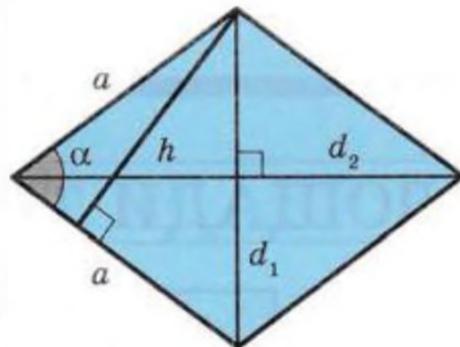


$$S = a \cdot h$$

$$S = ab \sin \alpha$$

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin \varphi$$

Ромб

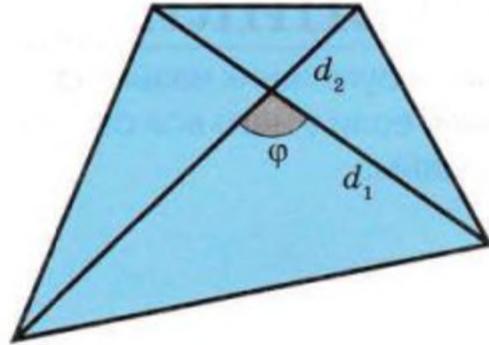


$$S = a \cdot h$$

$$S = a^2 \sin \alpha$$

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2$$

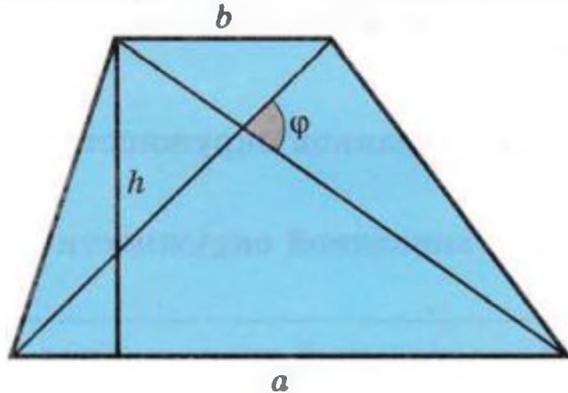
ПЛОЩАДИ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ



$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

Площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

Трапеция



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

$$S = m \cdot h \quad (m \text{ — длина средней линии})$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

Площадь треугольника ABC равна 24; DE – средняя линия, параллельная стороне AB . Найдите площадь треугольника CDE .

$24:4=6$ (подобие треугольников, для площадей коэффициент подобия возводится в квадрат)

В ромбе $ABCD$ угол DBA равен 13° . Найдите угол $B CD$. Ответ дайте в градусах.

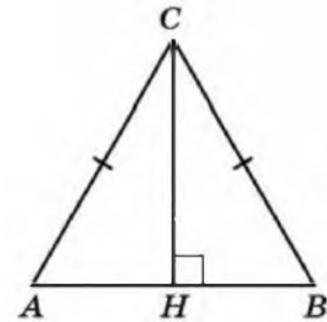
$$\begin{aligned}13 \cdot 2 &= 26 \\ 180 - 26 &= 154\end{aligned}$$

Стороны параллелограмма равны 24 и 27. Высота, опущенная на меньшую из этих сторон, равна 18. Найдите высоту, опущенную на бóльшую сторону параллелограмма.

$$\begin{aligned}S &= 24 \cdot 18 = 27 \cdot h \\ h &= 432 : 27 = 16\end{aligned}$$

В треугольнике ABC известно, что $AC=CB$, высота CH равна 9, $\operatorname{tg}A=1,8$. Найдите сторону AB .

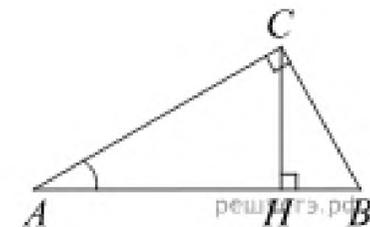
$$\begin{aligned}AH &= 9 : 1,8 = 5 \\ AB &= 2 \cdot 5 = 10\end{aligned}$$



В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH – высота, $AC=13$, $\operatorname{tg}A=\frac{5}{12}$.

Найти $АН$.

$$\begin{aligned}CH &= 5x \\ AH &= 12x \\ \text{По теор. Пифагора } x &= 1 \\ AH &= 12\end{aligned}$$



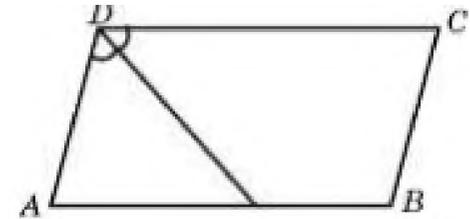
Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 4:3, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 88.

$$88:2=44=AB+AD=(AE+EB)+AD$$

$$AE=4x; EB=3x; AD=4x \text{ (ADE - равноб.)}$$

$$x=4$$

$$AB=7 \cdot 4=28$$

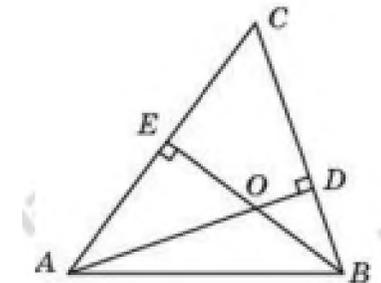


Два угла треугольника равны 58° и 72° . Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов. Ответ дайте в градусах.

$$C=180-58-72$$

$$EOD=180-C \text{ (или } 360-90-90-C)$$

$$\text{Ответ: } 130$$

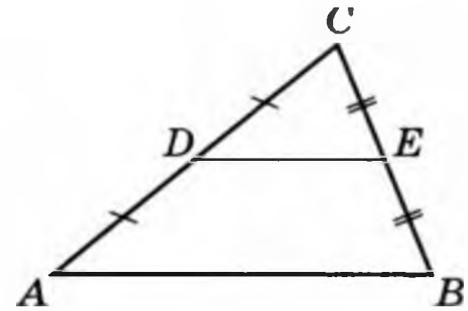


Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 145. Найдите площадь параллелограмма $A'B'C'D'$, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.

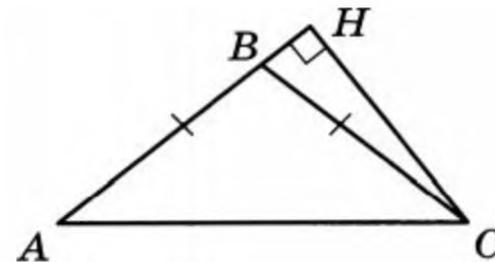
$$S=145:2=72,5$$

В треугольнике ABC средняя линия DE параллельна стороне AB . Найдите площадь треугольника ABC , если площадь трапеции $ABED$ равна 48.

$$48:3=16$$
$$48+3=64$$



В треугольнике ABC высота CH равна 6, $AB = BC$, $AC = 8$. Найдите синус угла ACB .



углы равноб.треуг. равны.

$$\sin A = \frac{6}{8} = 0,75$$

Ответ: 0,75

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 20$, $\operatorname{tg} B = \frac{4}{3}$. Найдите BC .

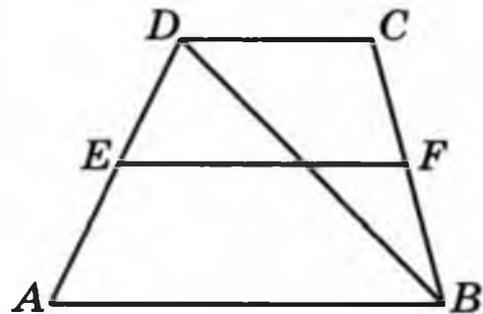
$$\begin{aligned} AC &= 4x, \quad CB = 3x \\ \text{По теор. Пифагора } x &= 4 \\ BC &= 3 \cdot 4 = 12 \end{aligned}$$

В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $BC = 14$, $\sin A = 0,5$. Найдите BH .

$$\begin{aligned} \sin A &= CB/AB = \cos B \\ \cos B &= BH/CB \\ BH &= 0,5 \cdot 14 = 7 \end{aligned}$$

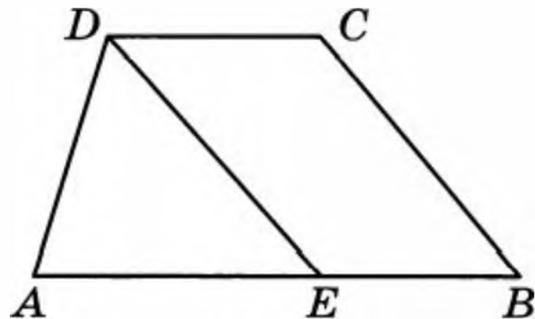
Основания трапеции равны 15 и 26. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.

$$26:2=13 \text{ (ср. линия треугольника)}$$



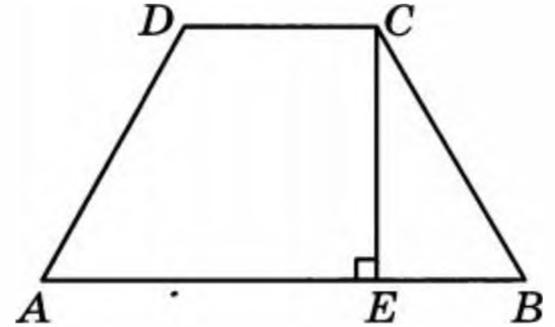
Прямая, проведённая параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 41, отсекает треугольник, периметр которого равен 83. Найдите периметр трапеции.

$$S=83+41+41=165$$



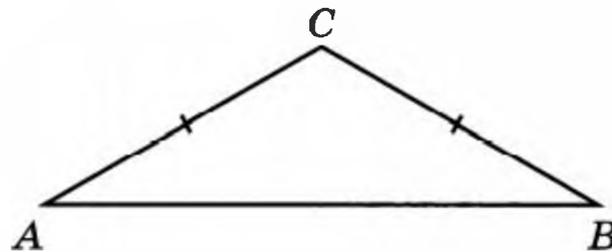
Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 10 и 9. Найдите среднюю линию этой трапеции.

$$CD=1$$
$$\text{Ср.л.}=(1+19):2=10$$

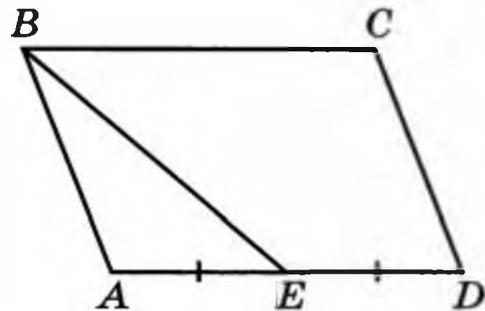


В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$,
 $AB = 20$, $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Найдите длину стороны AC .

Ответ:15



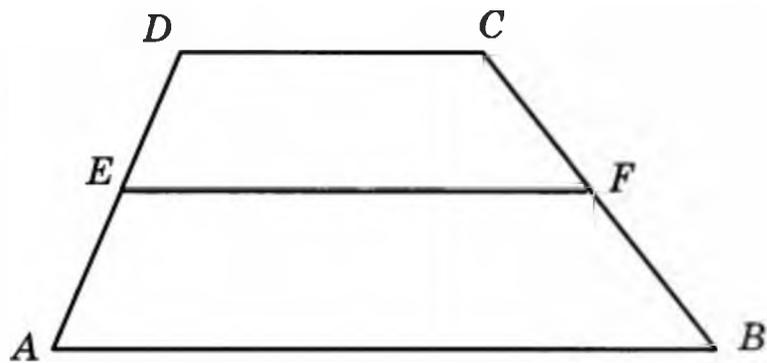
Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 28. Точка E — середина стороны AD . Найдите площадь трапеции $BCDE$.



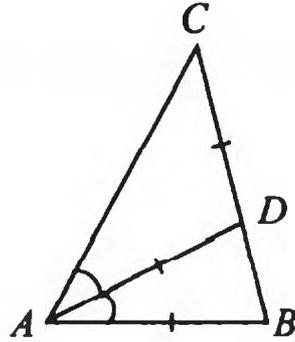
Ответ: 21

Средняя линия трапеции равна 18, а меньшее основание равно 10. Найдите большее основание трапеции.

Ответ: 26

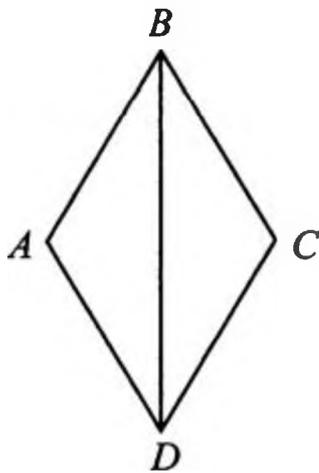


В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и $AB = AD = CD$.
Найдите меньший угол треугольника ADB . Ответ дайте
в градусах.



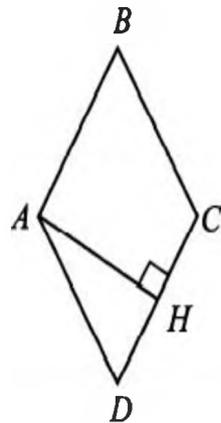
Ответ:36

Найдите большую диагональ ромба, сторона которого равна $2\sqrt{3}$, а острый угол равен 60°



Ответ: 6

6. Найдите высоту ромба, если большая диагональ равна 16, а сторона равна 10



Ответ: 9,6