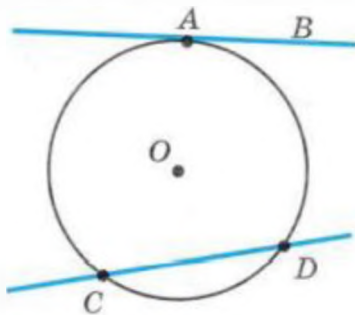


Планиметрия.

Окружность и ее элементы.

1. Центральные и вписанные углы
2. Окружность, касательная, хорда, секущая
3. Вписанные окружности
4. Описанные окружности

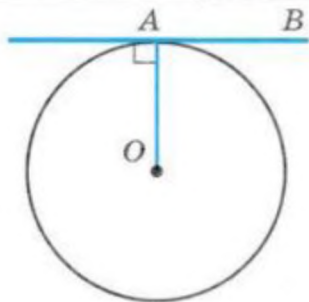
ОКРУЖНОСТЬ. КАСАТЕЛЬНЫЕ И СЕКУЩИЕ



Определение. Прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку, называют *касательной к окружности*.

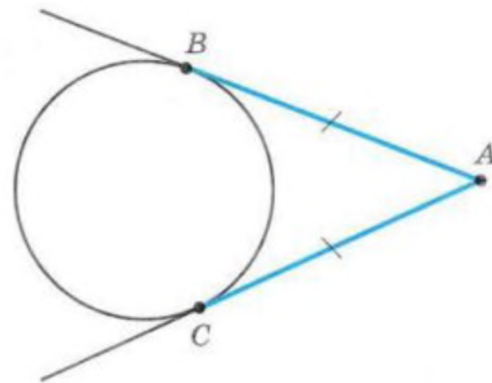
AB — касательная; A — точка касания;
 CD — секущая (прямая, имеющая с окружностью две общие точки).

Свойства



$$OA \perp AB$$

Касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

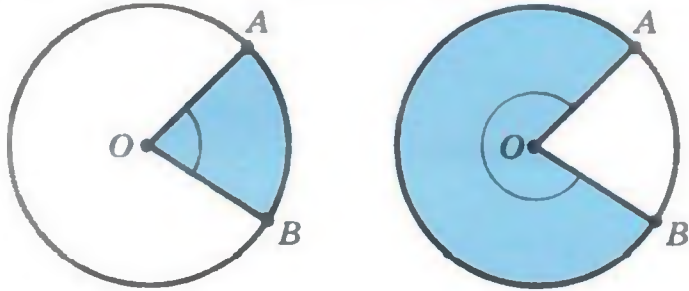


$$AB = AC$$

(B и C — точки касания)

Если из одной точки к одной окружности проведены две касательные, то отрезки касательных равны между собой.

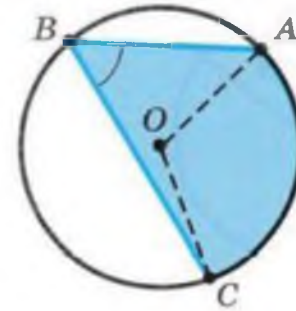
УГЛЫ В ОКРУЖНОСТИ



$\angle AOB$ — центральный угол

$$\angle AOB = \cup AB$$

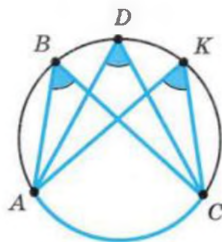
Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается.



$\angle ABC$ — вписанный угол

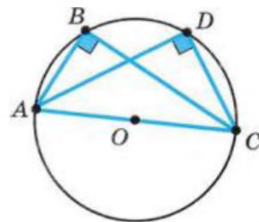
$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC = \frac{1}{2} \angle AOC$$

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается, и равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.



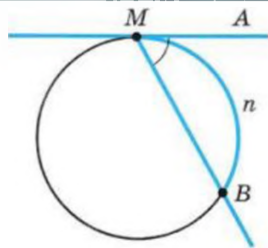
$$\angle ABC = \angle ADC = \angle AKC$$

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.



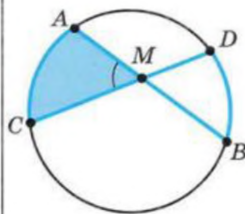
$$\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$$

Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90° .



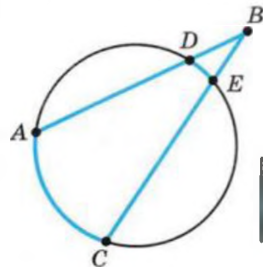
MA — касательная, MB — секущая.

$$\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MnB$$



AB и CD — хорды

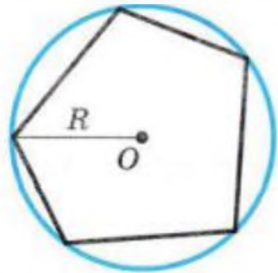
$$\angle AMC = \frac{1}{2} (\cup AC + \cup DB)$$



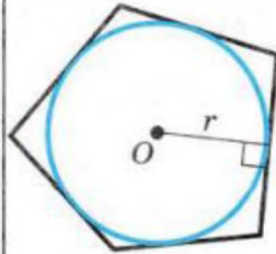
BA и BC — секущие

$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AC - \cup DE)$$

ВПИСАННЫЙ И ОПИСАННЫЙ МНОГОУГОЛЬНИКИ (описанная и вписанная окружности)



Вписанный многоугольник — все вершины лежат на окружности.

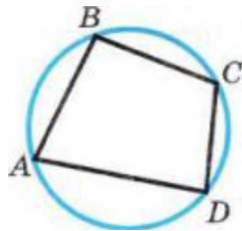


Описанный многоугольник — все стороны являются касательными к окружности.

$$S_{\text{опис}} = \frac{P \cdot r}{2},$$

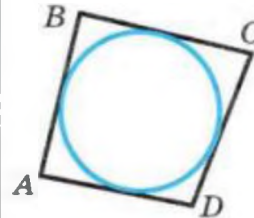
где P — периметр,
 r — радиус вписанной окружности.
 O — точка пересечения биссектрис внутренних углов.

ВПИСАННЫЙ И ОПИСАННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ



$$\begin{aligned} \angle A + \angle C &= 180^\circ, \\ \angle B + \angle D &= 180^\circ \end{aligned}$$

И наоборот: если у четырехугольника сумма противоположных углов равна 180° , то около него можно описать окружность.



$$AB + CD = BC + AD$$

(суммы длин противоположных сторон равны)

И наоборот: если у выпуклого четырехугольника суммы длин противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность.

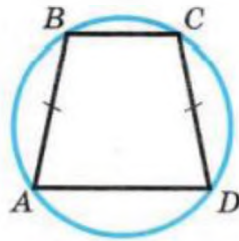
ПРЯМОУГОЛЬНИК



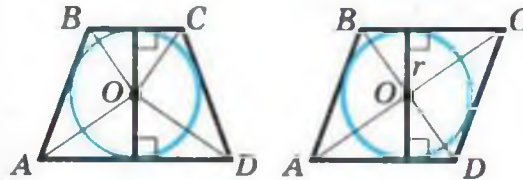
$$R = \frac{1}{2}d$$

1. Если параллелограмм вписан в окружность, то он — прямоугольник.
2. Центр окружности, описанной около прямоугольника, — точка пересечения его диагоналей.

ТРАПЕЦИЯ И РОМБ



Если $ABCD$ —
вписанная
трапеция,
то $AB = CD$

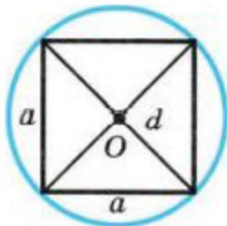


$$d_{\text{впис. окр}} = h$$

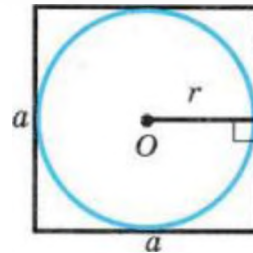
O — точка пересечения биссектрис внутренних углов.

$$\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$$

КВАДРАТ

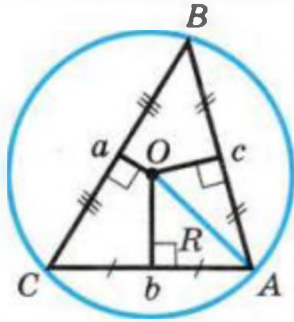


$$R_{\text{опис}} = \frac{1}{2}d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



$$r_{\text{впис}} = \frac{1}{2}a$$

Описанная окружность



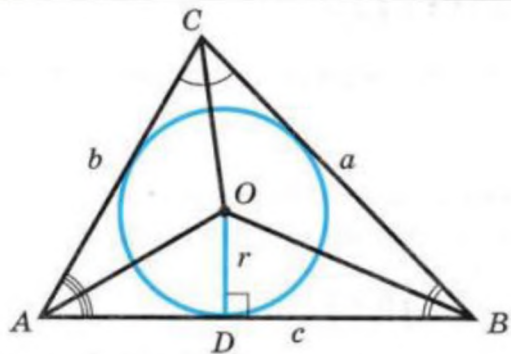
O — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника;

$$OA = OB = OC = R$$

$$R = \frac{a}{2\sin A}$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

Вписанная окружность

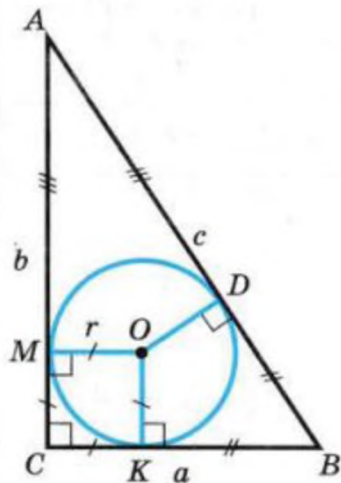


O — точка пересечения биссектрис внутренних углов треугольника;

$OD = r$; $OD \perp AB$

$$r = \frac{2S_{\Delta ABC}}{a+b+c}$$

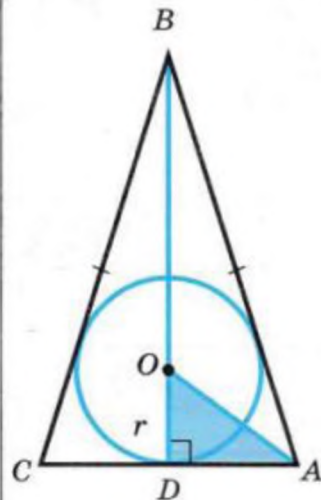
В прямоугольном треугольнике



$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

$OK = OM = OD = r$
($OKCM$ — квадрат)

В равнобедренном треугольнике

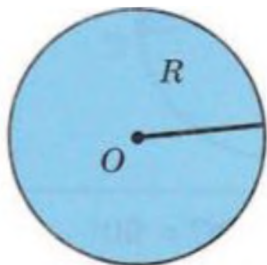


$AB = DC$;

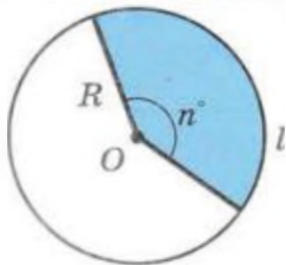
BD — высота, медиана и биссектриса;

AO — биссектриса угла A

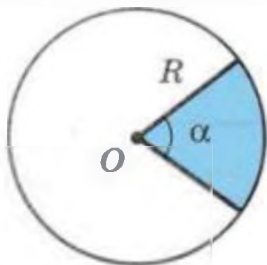
$$OD = r$$



$$S = \pi R^2$$



$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n$$



$$S = \frac{\pi R^2}{2\pi} \cdot \alpha =$$

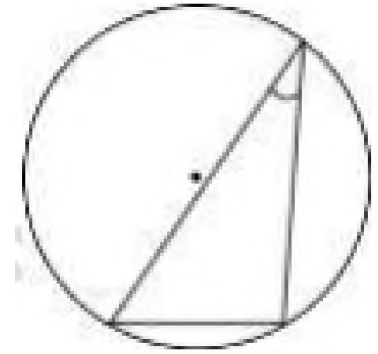
— **площадь круга**

— **площадь кругового сектора,
соответствующего центральному
углу в n градусов**

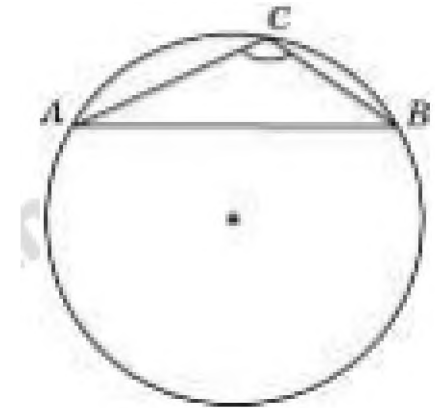
$\frac{R^2\alpha}{2}$ — **площадь кругового сектора,
соответствующего центральному
углу в α радиан**

Найти величину острого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную радиусу окружности. Ответ дайте в градусах.

$$60 : 2 = 30$$

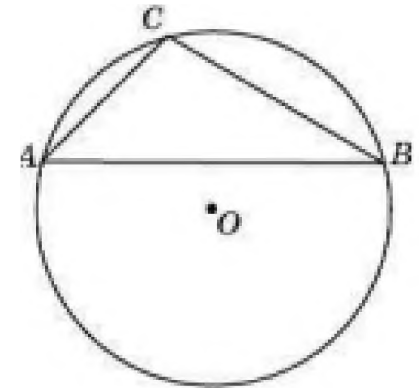


Найдите хорду, на которую опирается угол 120° , вписанный в окружность, радиуса $\sqrt{3}$.



$$AB=2R*\sin C=3 \text{ (по теореме синусов)}$$

Хорда АВ делит окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как 5:7. Под каким углом видна эта хорда из точки С, принадлежащей меньшей дуге окружности. Ответ дайте в градусах.



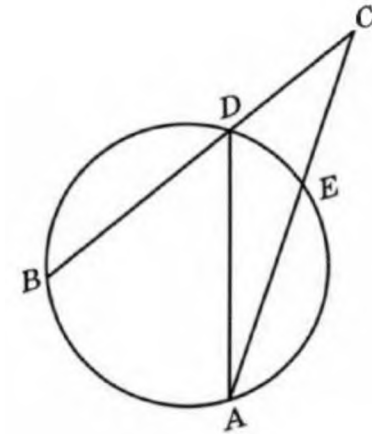
$$5x+7x=12x=360$$

$$x=360:12$$

$$x=30 - \text{одна часть}$$

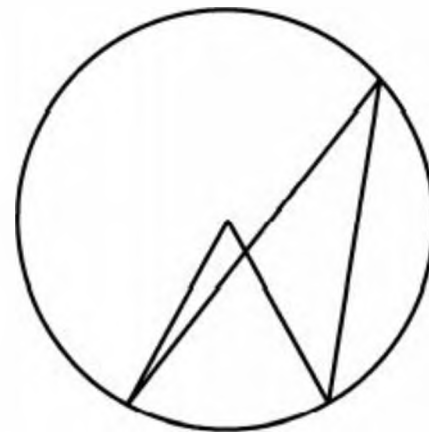
$$(30 \cdot 7):2=105 - \text{градусная мера угла } C$$

Градусная мера дуги АВ, не содержащей точку D, равна 106° .
Градусная мера дуги DE, не содержащей точку A, равна 48° .
Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



$(106-48):2=29$ (по свойству секущих, провед. из одной точки)

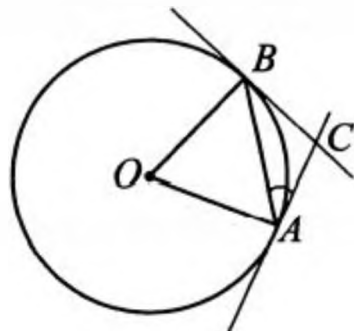
Найдите центральный угол, если он на 28° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу. Ответ дайте в градусах.



$$28 \cdot 2 = 56$$

Через точки A и B окружности с центром в точке O проведены касательные AC и BC . Угол CAB равен 42° . Найдите угол AOB .

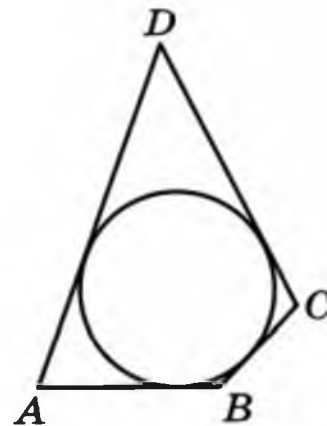
Ответ дайте в градусах.



$42 \cdot 2 = 84$ - дуга AB (по свойству секущей и касат.)

Значит и центральный угол O тоже 84

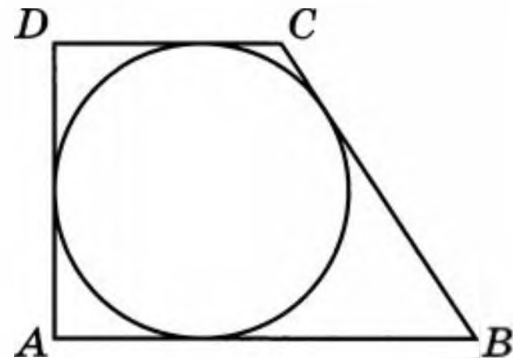
В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 13$, $CD = 18$.
Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.



$$AB + CD = BC + AD$$

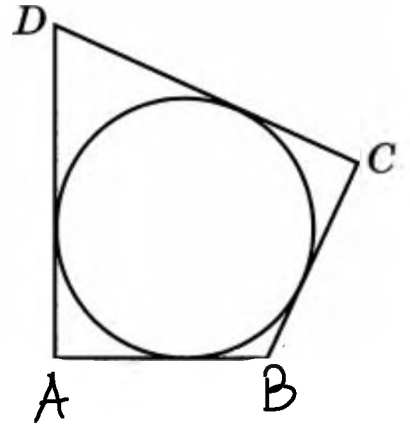
$$\text{Значит } P = 2 \cdot (AB + CD) = 2 \cdot 31 = 62$$

Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 100, её большая боковая сторона равна 37. Найдите радиус окружности.



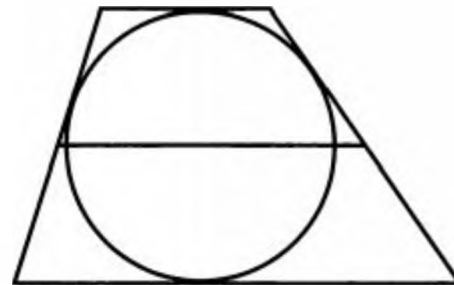
$$\begin{aligned}AB + CD &= BC + AD \\ \text{Значит } (AD + CB) &= 100 : 2 \\ AD &= 50 - CB \\ r &= AD : 2 = 6,5\end{aligned}$$

В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 8$, $BC = 5$ и $CD = 27$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.



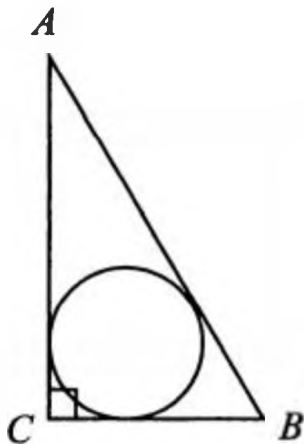
$$\begin{aligned} AB+CD &= BC+AD \\ \text{Значит } 8+27 &= 5+AD \\ AD &= 30 \end{aligned}$$

Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 28. Найдите длину её средней линии.



По свойству описанного четырехугольника
сумма оснований трапеции равна половине периметра.
Ср. линия трапеции - половина суммы оснований.
Тогда ср. линия равна 7.

В треугольнике ABC стороны равны 5, 12 и 13 радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

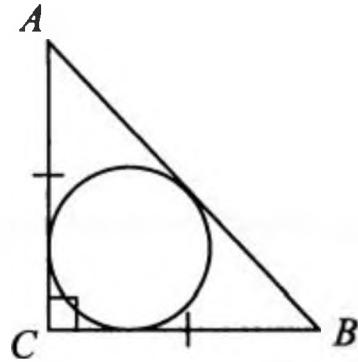


По свойству вписанной окружности в прямоуго. треугольник

$$r = (AC + CB - AB) : 2$$

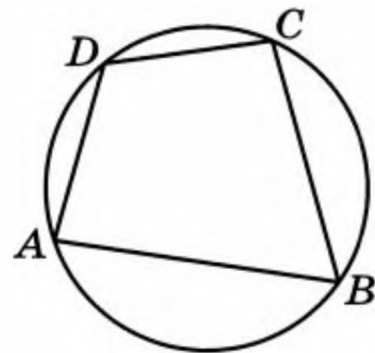
$$r = 2$$

Катеты равнобедренного треугольника равны $2 + \sqrt{2}$
Найдите диаметр окружности, вписанной в этот треугольник.

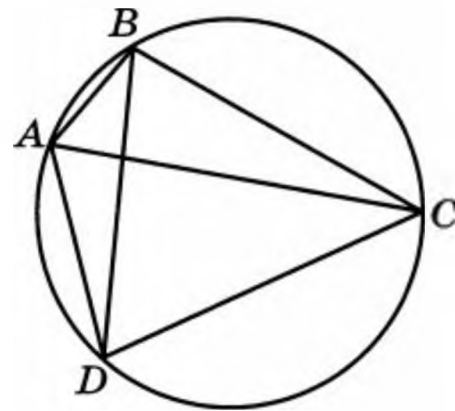


По свойству вписанной окружности в прямоуго. треугольник
 $r = (AC + CB - AB) : 2$ или тогда $d = AC + CB - AB$
AB по теореме Пифагора (или как диагональ квадрата)
 $d = 2$

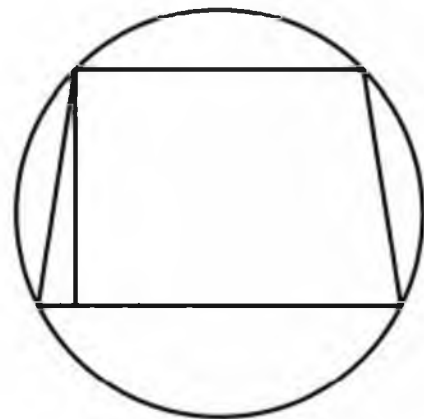
Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 112° и 125° . Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.



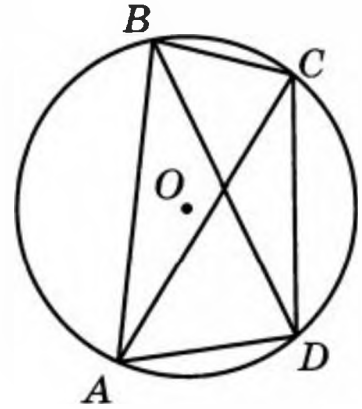
Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 106° , угол CAD равен 69° . Найдите угол ABD .
Ответ дайте в градусах.



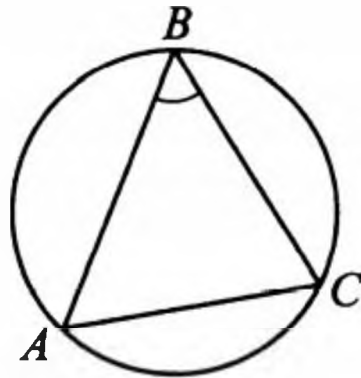
Основания равнобедренной трапеции равны 24 и 10. Радиус описанной окружности равен 13. Центр окружности лежит внутри трапеции. Найдите высоту трапеции.



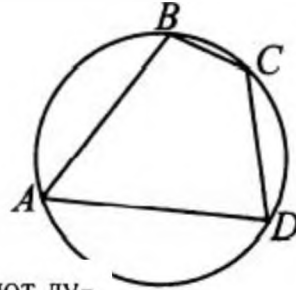
Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 25° , угол CAD равен 41° . Найдите угол ABC . Ответ дайте в градусах.



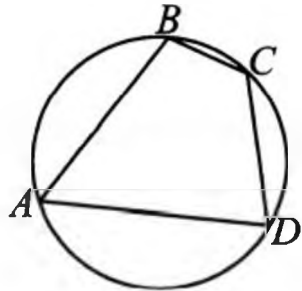
Одна сторона треугольника ABC равна $\sqrt{3}$, радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен 1. Найдите острый угол треугольника, противолежащий этой стороне. Ответ дайте в градусах.



Точки A, B, C, D , расположенные на окружности, делят эту окружность на четыре дуги AB, BC, CD и AD , градусные величины которых относятся как $4 : 2 : 3 : 6$. Найдите угол BCD . Ответ дайте в градусах.

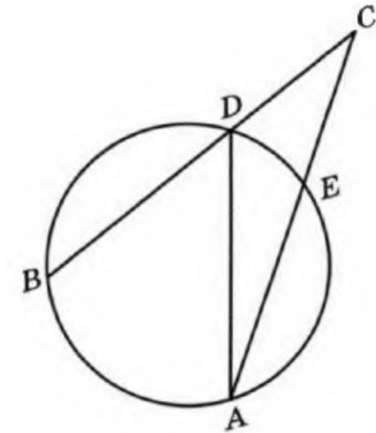


Стороны AB, BC, CD и AD четырёхугольника $ABCD$ стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно $93^\circ, 47^\circ, 72^\circ, 148^\circ$. Найдите угол ABC . Ответ дайте в градусах.

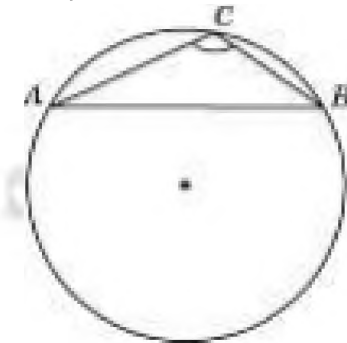


Домашнее задание

1) Угол ACB равен 42° . Градусная мера дуги AB окружности, не содержащей точек D и E , равна 124° . Найдите угол DAE . Ответ дайте в градусах.



2) Найдите хорду, на которую опирается угол 120° , вписанный в окружность, радиуса $2\sqrt{3}$.



3) В четырехугольнике $ABCD$, периметр которого равен 36, вписана окружность. $BC=6$. Найти AD .

